Variables aléatoires réelles

1 Notion de variable aléatoire

1.1 Variable aléatoire

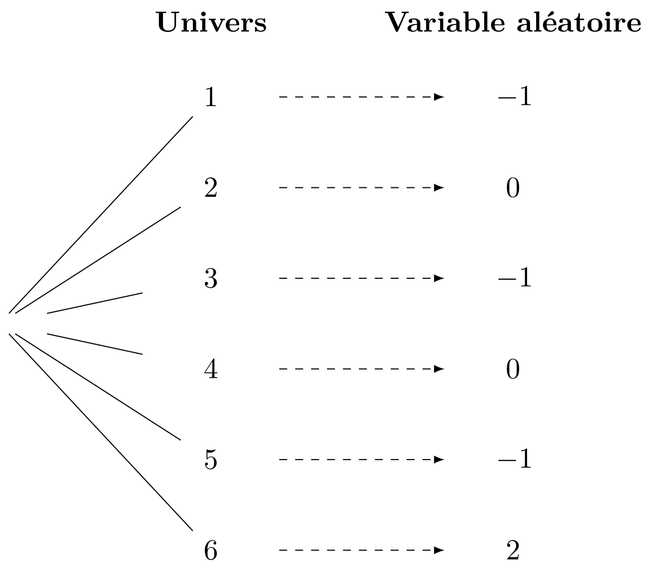
Définition 1 : On appelle variable aléatoire réelle toute fonction définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Les variables aléatoires sont en général notées X.

■ **Exemple 1 :** On choisit un nombre entier au hasard entre 1 et 6 compris. L'univers de l'expérience aléatoire est donc l'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Si le nombre obtenu est 6, on gagne 2 points. Si le nombre est impair, on perd 1 point. Dans les autres cas, on ne gagne ni ne perd aucun point.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de points gagnés selon le résultat.

- Si on obtient le nombre 1, on perd 1 point. On a ainsi $X(1) = -1$.
- Si on obtient le nombre 6, on gagne 2 points. On a ainsi $X(6) = 2$.
- On a également $X(2) = 0$, $X(3) = -1$, $X(4) = 0$ et $X(5) = -1$.

■



Définition 2 : Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers Ω et a un réel.
On note $[X = a]$ l'événement qui regroupe toutes les issues ω de Ω telle que $X(\omega) = a$.
On peut définir de la même manière les événements $[X < a]$, $[X \leqslant a]$, $[X \geqslant a]$...

$$[X = a] = \{\omega \in \Omega \,;\, X(\omega) = a\}$$

■ **Exemple 2 :** On reprend l'exemple précédent.

- L'événement $[X = -1]$ correspond aux issues qui font perdre un point, c'est-à-dire les issues 1, 3 et 5.
- L'événement $[X \geqslant 0]$ correspond aux issues qui font gagner 0 point ou plus, c'est-à-dire les issues 2, 4 et 6.

■

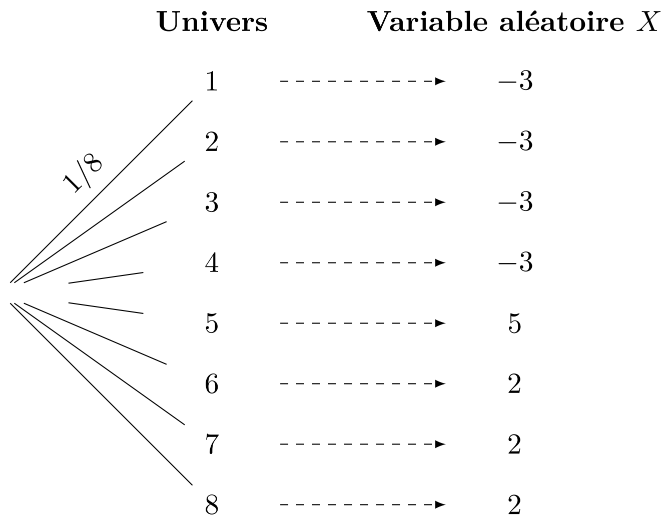
1.2 Loi d'une variable aléatoire

Définition 3 : Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers Ω.
La loi de probabilité de X est la fonction qui, à chaque réel $k \in X(\Omega)$, associe la probabilité de l'événement $[X = k]$. On note $\mathbb{P}\,(X = k) = \mathbb{P}\left([X = k]\right)$.

R On rappelle que la somme des probabilités doit valoir 1 !

■ **Exemple 3 :** On choisit uniformément au hasard un nombre entier entre 1 et 8 compris.
- Si le nombre obtenu est supérieur ou égal à 6, on gagne 2 points.
- Si le nombre obtenu est inférieur ou égal à 4, on perd 3 points.
- Si le nombre obtenu est 5, on gagne 5 points.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de points gagnés après l'expérience.



X peut donc prendre trois valeurs : -3, 2 ou 5. Pour déterminer la loi de X, il faut donc déterminer $\mathbb{P}(X = -3)$, $\mathbb{P}(X = 2)$ et $\mathbb{P}(X = 5)$.
- L'événement $[X = -3]$ est composé des issues 1, 2, 3 et 4. Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, $\mathbb{P}(X = -3) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
- L'événement $[X = 2]$ est composé des issues 6, 7 et 8. Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{8}$
- L'événement $[X = 5]$ est composé de l'issue 5. Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, $\mathbb{P}(X = -3) = \frac{1}{8}$

On peut résumer cela dans un tableau

k	-3	2	5
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

■

2 Espérance, variance et écart-type

2.1 Espérance d'une variable aléatoire réelle

Définition 4 : Soit X une variable aléatoire. On note x_1, x_2, ..., x_n les valeurs prises par la variable aléatoire X.
Pour i allant de 1 à n, on note p_i la probabilité $\mathbb{P}(X = x_i)$. L'espérance de X, notée $E[X]$, est la valeur

$$E[X] = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i\,. \qquad \text{On démontre que } \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\,\mathbb{P}(X=\omega)\,.$$

R Il s'agit en quelque sorte de la moyenne des valeurs prises par la variable aléatoire X, pondérées par leurs probabilités.

■ **Exemple 4 :** On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant.

k	-1	2	3	8
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

L'espérance de la variable aléatoire X vaut :

$$E[X] = \frac{1}{3} \times (-1) + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{4} \times 8 = \frac{8}{3}$$

"En moyenne", la variable aléatoire X vaut $\frac{8}{3}$. ■

2.2 Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

Définition 5 : Soit X une variable aléatoire. On note x_1, x_2, ..., x_n les valeurs prises par la variable aléatoire X. La variance X, notée $V(X)$, est la valeur

$$V(X) = p_1(x_1 - E[X])^2 + p_2(x_2 - E[X])^2 + \ldots + p_n(x_n - E[X])^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E[X])^2$$

Cette quantité mesure la dispersion autour de l'espérance.

R On a en fait $V(X) = E[(X - E[X])^2]$

■ **Exemple 5 :** On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant.

k	-3	1	4	9
$\mathbb{P}(X = k)$	0.6	0.2	0.15	0.05

Dans un premier temps, on calcule l'espérance de la variable aléatoire X.

$$E[X] = -3 \times 0.6 + 1 \times 0.2 + 4 \times 0.15 + 9 \times 0.05 = -0.55$$

Pour calculer la variance,
- Pour chaque valeur de la variable aléatoire, on retire l'espérance. On dit que l'on centre la variable aléatoire.
- On met chaque nombre obtenu au carré.
- Chaque nombre est multiplié par sa probabilité.
- On ajoute alors chacun des nombres obtenus.

Dans ce cas,

x_i	-3	1	4	9
$x_i - E[X]$	-2.45	1.55	4.55	9.55
$(x_i - E[X])^2$	6.0025	2.4025	20.7025	91.2025
p_i	0.6	0.2	0.15	0.05
$p_i(x_i - E[X])^2$	3.6015	0.4805	3.105375	4.560125

La variance de X vaut donc

$$V(X) = 3.6015 + 0.4805 + 3.105375 + 4.560125 = 11.7475$$

■

Définition 6 : Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle écart-type de X, noté $\sigma(X)$ (sigma), la valeur

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

R L'écart-type mesure la variation moyenne de la variable aléatoire autour de l'espérance.

■ **Exemple 6 :** Dans l'exemple précédent, l'écart-type était donc $\sigma(X) = \sqrt{11.7475} \simeq 3.42$. ■

3 Opérations sur les variables aléatoires

3.1 Sommes et produits par un réel

Définition 7 : Soit X une variable aléatoire réelle, définie sur Ω. Soit a un réel non nul. La variable aléatoire aX est définie par

$$\text{Pour tout } \omega \in \Omega,\ (aX)(\omega) = a \times X(\omega)\,.$$

Ainsi, pour tout réel k,

$$\mathbb{P}(aX = k) = \mathbb{P}\left(X = \frac{k}{a}\right).$$

■ **Exemple 7 :** On lance un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6. On note X le résultat obtenu. La loi de la variable aléatoire de X est donc résumée dans le tableau ci-dessous.

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On note Y la variable aléatoire telle que $Y = 3X$. Ainsi, Y est la variable aléatoire qui multiplie par 3 le nombre obtenu. La loi de Y peut être résumée par le tableau ci-dessous.

k	3	6	9	12	15	18
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

■

Définition 8 : Soit X une variable aléatoire réelle définie sur Ω et a un réel. La variable aléatoire $Y = X + a$ est définie par

$$\text{Pour tout } \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = X(\omega) + a\,.$$

Ainsi, pour tout réel k,

$$\mathbb{P}(X + a = k) = \mathbb{P}(X = k - a).$$

■ **Exemple 8 :** On lance un dé équilibré à 4 faces, numérotées de 1 à 6, et on note X la variable aléatoire qui donne le numéro porté par la face du dessous. La loi de X peut être résumée ci-dessous.

k	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

On note Y la variable aléatoire qui donne le numéro porté par la face du dessous et lui retire 3. On a alors $Y = X - 3$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X - 3 = 1) = \mathbb{P}(X = 4) = \frac{1}{4}$$

On peut alors résumer la loi de Y dans un tableau.

k	-2	-1	0	1
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

■

3.2 Somme de deux variables aléatoires

Définition 9 : Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur Ω_1 et Ω_2 respectivement. La variable aléatoire $Z = X + Y$ est définie par :

$$\text{Pour tout } \omega = (\omega_1 ; \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2,\ Z(\omega) = X(\omega_1) + Y(\omega_2).$$

Par ailleurs, pour tout réel k,

$$P(Z = k) = \sum_{i+j=k} \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)).$$

Si X et Y sont indépendantes, on a alors :

$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{i+j=k} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j).$$

■ **Exemple 9 :** On possède deux urnes comportant des boules numérotées. La première contient trois boules, portant respectivement les numéros 1, 3 et 6. La seconde contient trois boules, portant respectivement les numéros 2, 3 et 5. On tire uniformément au hasard une boule dans chaque urne et on fait la somme des numéros ainsi tirés.

Notons X la variable aléatoire donnant le résultat du tirage dans la première urne et Y la variable aléatoire donnant le résultat du tirage dans la deuxième urne. On cherche alors à déterminer la loi de $X + Y$. Un arbre peut nous permettre d'y voir plus clair...

X	Y	$(X;Y)$	$X+Y$
1	2	(1;2)	3
	3	(1;3)	4
	5	(1;5)	6
3	2	(3;2)	5
	3	(3;3)	6
	5	(3;5)	8
6	2	(6;2)	8
	3	(6;3)	9
	5	(6;5)	11

Les tirages possibles sont $(1;2)$, $(1;3)$, $(1;5)$, $(3;2)$, $(3;3)$, $(3;5)$, $(6;2)$, $(6;3)$ et $(6;5)$. Les sommes possibles sont ainsi 3, 4, 5, 6, 8, 9 et 11.

Les tirages étant indépendants, on a :

$$\mathbb{P}(X + Y = 3) = \mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

On remarque que l'on peut obtenir la somme 6 de plusieurs façons : en obtenant $(1;5)$ ou $(3;3)$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X+Y=6)=\mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}(Y=5)+\mathbb{P}(X=3)\times\mathbb{P}(Y=3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

En faisant ainsi pour chaque valeur possible de la somme, on construit le tableau de la loi de $X+Y$.

k	3	4	5	6	8	9	11
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

■

4 Espérance et variance d'une somme de variables

4.1 Cas général

Propriété 1 : Soit X et Y deux variables aléatoires, a et b deux réels.
- $\mathbb{E}(aX+b)=a\mathbb{E}(X)+b$
- $\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$

■ **Exemple 10 :** On considère le jeu suivant : la participation est fixée à 8 euros. On lance un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6 et on remporte deux fois la somme inscrite sur le dé. On considère la variable aléatoire X qui donne le résultat du lancer et Y le gain du joueur, positif ou négatif. On a alors $Y=2X-8$. L'espérance de X est 3,5. Ainsi, $\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(2X-8)=2\mathbb{E}(X)-8=2\times 3,5-8=-1$. L'espérance étant négative, le jeu est défavorable au joueur. ■

Propriété 2 : Soit X et Y deux variables aléatoires **indépendantes**, a un réel.
- $Var(aX)=a^2Var(X)$
- $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$

4.2 Applications à la loi binomiale

Propriété 3 : Soit X_1, X_2, ...,X_n des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p. Notons $S=X_1+X_2+\ldots+X_n$. S suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Réciproquement, si une variable aléatoire S suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors S peut s'écrire comme la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

■ **Exemple 11 :** On lance 6 fois une pièce de monnaie équilibrée. Chaque PILE obtenu rapporte un euro. La variable aléatoire Y qui donne les gains à la fin des 6 lancers suit une loi binomiale de paramètres 6 et $\frac{1}{2}$ ■

Propriété 4 : Soit S une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.
- $\mathbb{E}(S) = np$
- $Var(S) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Démonstration 4.1 : On écrit S comme la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

Or, pour tout entier naturel i compris entre 1 et n, $\mathbb{E}(X_i) = p$ et $Var(X_i) = p(1-p)$. On a donc $\mathbb{E}(S) = p + p + \ldots + p = np$. De plus, les variables X_i étant indépendantes, $Var(S) = p(1-p) + p(1-p) + \ldots + p(1-p) = np(1-p)$. □

■ **Exemple 12 :** On lance 12 dés équilibrées à 6 faces, numérotées de 1 à 6. On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de 6 obtenus. Y suit une loi binomiale de paramètres 12 et $\frac{1}{6}$. Ainsi, $\mathbb{E}(Y) = 12 \times \frac{1}{6} = 2$ et $Var(Y) = 12 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{3}$ ■