Fonctions trigonométriques

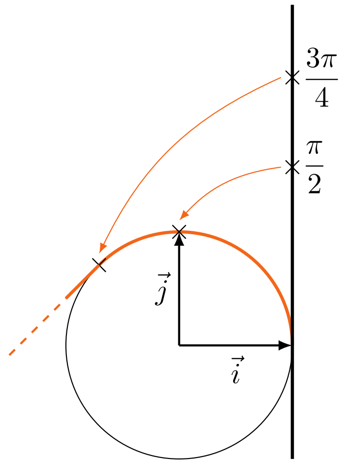
Dans tout ce chapitre, on se place dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé.

1 Rappels

1.1 Enroulement de la droite des réels

Définition 1 : On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1 que l'on parcourt dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Ce sens est appelé sens trigonométrique.

On trace la droite des réels à droite de ce cercle trigonométrique, parallèlement à l'axe des ordonnées, puis on l'enroule autour d'une cercle trigonométrique. A chaque point x sur cette droite des réels, on associe ainsi un unique point $M(x)$ sur le cercle.

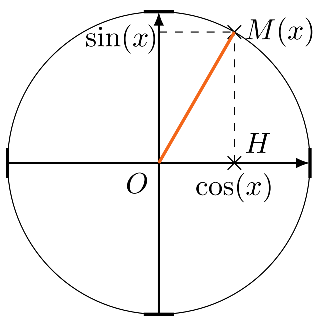


Propriété 1 : Deux réels dont la différence est le produit de 2π et d'un nombre entier ont la même image par M.

1.2 Cosinus et sinus d'un nombre réel

Définition 2 : Soit x un réel et $M(x)$ son image sur le cercle trigonométrique. On appelle :

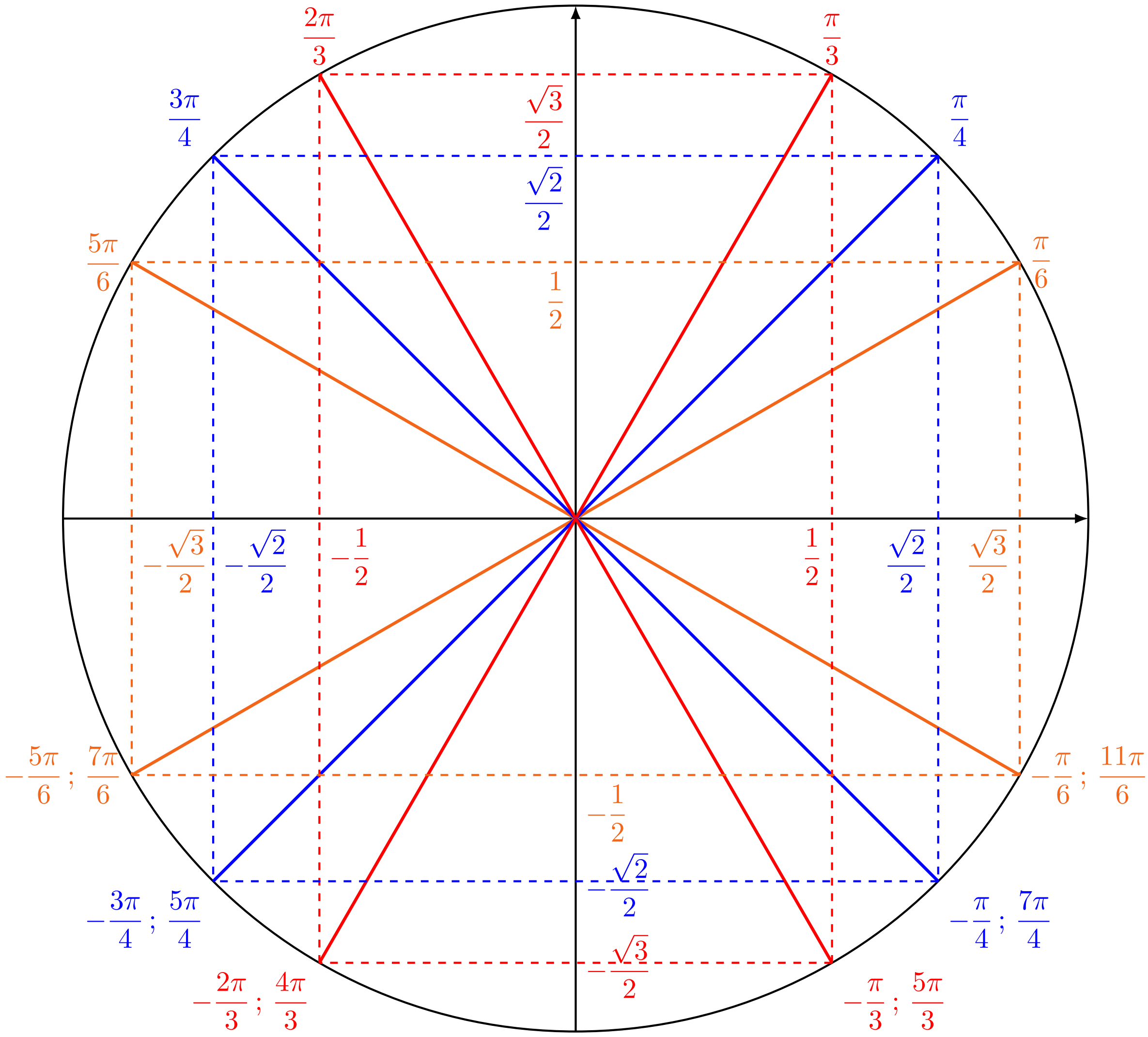
- Cosinus de x, noté $\cos(x)$, l'abscisse de $M(x)$
- Sinus de x, noté $\sin(x)$, l'ordonnée de $M(x)$



■ **Exemple 1 :** On retiendra en particulier les valeurs remarquables suivantes

Degré	0	30	45	60	90	180
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

■



Propriété 2 : Pour tout réel x,
- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$
- $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$

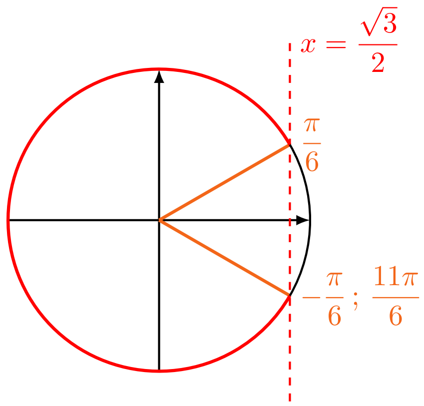
1.3 Résolution d'équation et d'inéquation

■ **Exemple 2 :** Les solutions de l'équation $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$ sont $-\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{3}$. ■

■ **Exemple 3 :** Les solutions de l'équation $\cos(x) = 0$ sur $[0; 2\pi]$ sont $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{3\pi}{2}$. ■

■ **Exemple 4 :** Les solutions de l'inéquation $\cos(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$ constituent les intervalles $\left[-\pi; -\dfrac{\pi}{6}\right]$ et $\left[\dfrac{\pi}{6}; \pi\right]$.

Sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, les solutions constituent l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{11\pi}{6}\right]$. ■

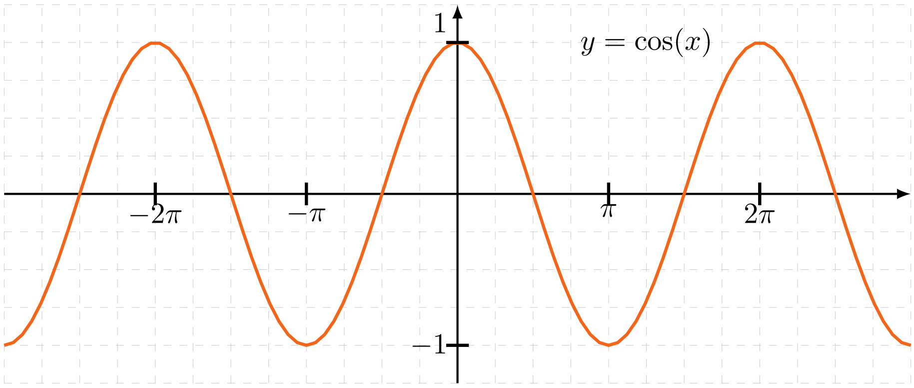


R Il faut donc faire attention à l'intervalle de résolution.. Dans tous les cas, le cercle trigonométrique sera votre plus précieux allié.

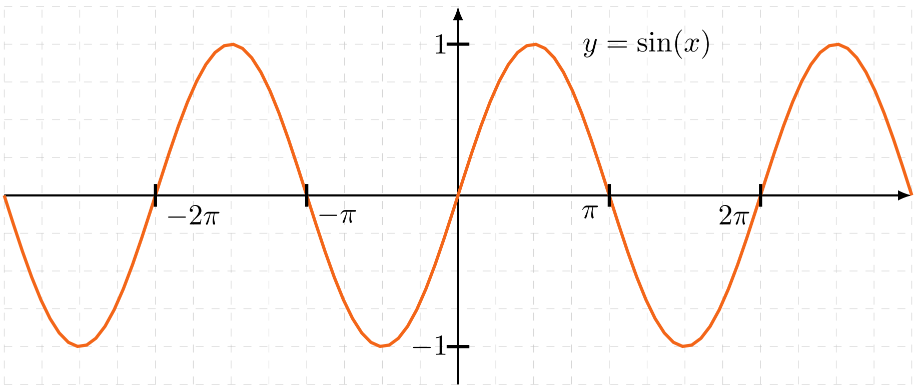
2 Fonctions trigonométriques

2.1 Définition et variations

Définition 3 : La fonction cosinus est la fonction qui, à tout réel x, associe $\cos(x)$.
La fonction sinus est la fonction qui, à tout réel x, associe $\sin(x)$.



x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
cos	-1 ↗		0 ↗		1 ↘		0 ↘		-1
$\cos(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	



x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1 ↘	0
$\sin(x)$	0	$-$	0	$+$	0

Propriété 3 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
- $\cos(-x) = \cos(x)$, la fonction cosinus est paire.
- $\sin(-x) = -\sin(x)$; la fonction sinus est impaire.

■ **Exemple 5 :** $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ■

Propriété 4 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a
- $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos(x)$
- $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin(x)$

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.

■ **Exemple 6 :** $\cos\left(\frac{25\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{24\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(4 \times 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ■

2.2 Dérivée des fonctions trigonométriques

Propriété 5 : Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout réel x,
- $\sin'(x) = \cos(x)$
- $\cos'(x) = -\sin(x)$

■ **Exemple 7 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^{2x}\cos(x)$.
- Pour tout réel x, on pose $u(x) = e^{2x}$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = 2e^{2x}$
- Pour tout réel x, on pose $v(x) = \cos(x)$. v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = -\sin(x)$

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 2e^{2x} \times \cos(x) - e^{2x} \times \sin(x) = e^{2x}(2\cos(x) - \sin(x))$$

■

Propriété 6 : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I
- $\sin(u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\sin(u))' = u' \times \cos(u)$
- $\cos(u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\cos(u))' = -u' \times \sin(u)$

■ **Exemple 8 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \sin(3x^2 - 4x + 5)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = (6x - 4)\sin(3x^2 - 4x + 5)$ ■

Propriété 7 : Soit a un réel non nul.
- Une primitive de $x \mapsto \cos(ax)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{\sin(ax)}{a}$
- Une primitive de $x \mapsto \sin(ax)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto -\frac{\cos(ax)}{a}$

Démonstration 2.1 : Il suffit de dériver. Attention au signe ! □

■ **Exemple 9 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = 3\cos(2x) - 5\sin(9x)$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie pour tout réel x par $F(x) = \frac{3}{2}\sin(2x) + \frac{5}{9}\cos(9x)$. ■