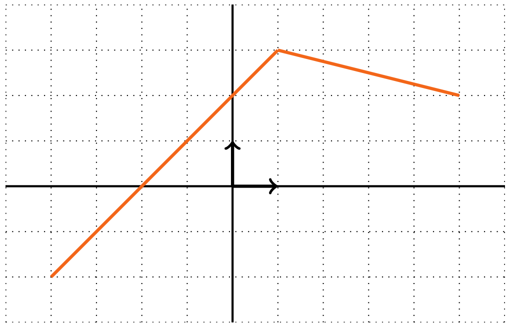
Exercices : Calcul intégral

1 Intégrale d'une fonction continue positive

► **Exercice 1**
On considère une fonction f dont la courbe représentative est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé

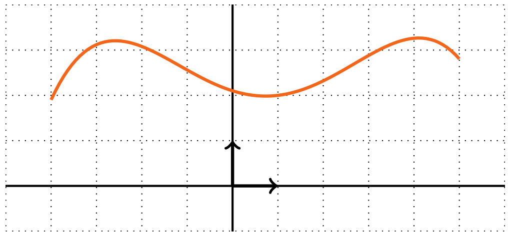


Déterminer les valeurs de

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx \qquad \int_{0}^{5} f(x)dx$$

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx \qquad \int_{-2}^{5} f(x)dx$$

► **Exercice 2**
On considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-contre dans un repère orthonormé.



Donner un encadrement de $\displaystyle\int_{-4}^{5} f(x)dx$

► **Exercice 3**
Pour tout réel x, on pose $f(x) = 2x + 8$. Calculer $\displaystyle\int_{-3}^{5} f(x)dx$.

► **Exercice 4**
On rappelle que pour tout réel x, $|x| = \max(x, -x)$. Déterminer $\displaystyle\int_{-3}^{5} |x|dx$

► **Exercice 5**
Soit x un réel supérieur ou égal à 4. Exprimer $\displaystyle\int_{4}^{x} (2t + 3)dt$ en fonction de x.

► **Exercice 6**
Soit f une fonction affine que l'on suppose positive sur $[-3; 5]$, telle que $\displaystyle\int_{-3}^{5} f(x)dx = 24$ et $\displaystyle\int_{1}^{5} f(x)dx = 14$. Donner une expression de $f(x)$ pour tout réel x.

2 Intégrale et primitives

► Exercice 7
Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-5}^{7} \sqrt{2}dx \qquad \int_{3}^{14} \frac{1}{x}dx \qquad \int_{-2}^{4} (x^2+3x+4)dx$$

$$\int_{0}^{10} e^{-5x}dx \qquad \int_{-1}^{1} (x^4-x^2+x-1)dx \qquad \int_{-2}^{2} (8x^5+5x^3+2x)dx$$

$$\int_{0}^{1} e^{2x}dx \qquad \int_{1}^{9} \frac{3}{2\sqrt{x}}dx \qquad \int_{0}^{2} \left((x+1)(x+2)\right)dx$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x}dx \qquad \int_{3}^{7} \frac{1}{x^2}dx \qquad \int_{1}^{2} \frac{x+1}{x^3}dx$$

► Exercice 8
Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-3}^{3} (x^5+2x^3-2x)dx \qquad \int_{-2}^{4} 2xe^{x^2}dx \qquad \int_{2}^{e} \frac{1}{x\ln(x)}dx$$

$$\int_{1}^{3} \frac{e^{1/x}}{x^2}dx \qquad \int_{0}^{4} \frac{2x}{1+x^2}dx \qquad \int_{-1}^{4} \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}dx$$

$$\int_{-1}^{1} 24x(3x^2+1)^3dx \qquad \int_{0}^{1} (3x^2-1)dx \qquad \int_{-3}^{2} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$$

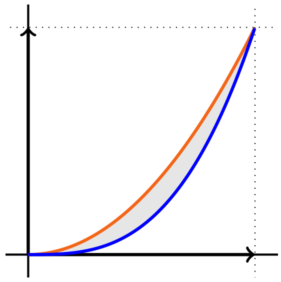
► Exercice 9
Pour tout réel $x > -1$, on pose $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$.

1. Montrer que pour tout réel $x > -1$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$
2. En déduire une primitive de f sur $]-1;+\infty[$
3. Calculer alors $\displaystyle\int_1^3 f(x)dx$

► Exercice 10
On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \begin{cases} x^2+x & \text{, si } x < -1 \\ 2x^3-x+1 & \text{, si } x \geqslant -1 \end{cases}$.

Calculer $\displaystyle\int_{-4}^{1} f(t)dt$

► Exercice 11
Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$ en utilisant celle de $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx + \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$.



► Exercice 12

On a tracé ci-contre, dans un repère orthonormé, les courbes des fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x^3$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

1. Justifier que, pour tout réel $x \in [0; 1]$, $f(x) \geqslant g(x)$.
2. Calculer l'aire de la surface grisée.

► Exercice 13

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^n e^{-x^2} dx$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante
2. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $-x^2 \leqslant -2x + 1$ et que $e^{-x^2} \leqslant e^{-2x+1}$
3. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \dfrac{e}{2}$
4. En déduire que la suite (u_n) converge. On ne cherchera pas à calculer sa limite.

► Exercice 14

Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto 3x + 2$ sur $[-2; 3]$

► Exercice 15

Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto -x^2 + 4x$ sur $[0; 4]$

► Exercice 16

Un bénéfice, en milliers d'euros, que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique x milliers de pièces est égal à :

$$f(x) = \frac{5\ln(x)}{x} + 3$$

1. Montrer que $F : x \mapsto \dfrac{5\ln(x)^2}{2} + 3x$ est une primitive de f sur $[2; 4]$
2. Calculer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie de 2000 à 4000 pièces

► Exercice 17

Soit f une fonction affine. Montrer que la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a,b]$ vaut $\dfrac{f(a) + f(b)}{2}$.

3 Intégration par parties

► Exercice 18

A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^4 x\ln(x)dx$. On pourra poser $v = \ln$ et déterminer une fonction u tel que pour tout réel x, $u'(x) = x$.

► Exercice 19

En utilisant deux intégrations par parties successives, déterminer $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x dx$

► Exercice 20

Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale I_n par

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x}dx \quad \text{et, si } n \geqslant 1, I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}dx$$

1. Calculer la valeur exacte de I_0
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n,

$$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$$

3. En déduire les valeurs de I_1 et I_2.

► Exercice 21

Soit t un réel strictement supérieur à 1.

A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^t \ln(x)dx$. On pourra poser $v = \ln$ et déterminer une fonction u tel que pour tout réel x, $u'(x) = 1$.

► Exercice 22

Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^2e^{-x}$

1. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Trouver deux réels m et M tels que pour tout réel $x \geqslant 0$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.
3. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx$.
4. Chercher trois réels a, b et c tels que la fonction $x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive de f et en déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx$.
5. Retrouver cette valeur à l'aide de deux intégrations par parties successives.

► Exercice 23

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x)dx$.

1. Calculer I_0
2. Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante. Que peut-on en déduire ?
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n et tout $x \in [0;1]$, $x^n \ln(1+x) \leqslant x^n$
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
4. (a) En effectuant une intégration par partie, montrer que pour tout entier naturel n, on a

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$

   (b) Étudier la convergence de la suite (I_n).

Apprendre à modéliser

DÉVELOPPER DES COMPÉTENCES

Du spaghetti au triangle

Stéphanie coupe au hasard un spaghetti en deux morceaux, puis recoupe le plus grand des deux morceaux en deux : quelle est la probabilité qu'elle puisse construire un triangle avec les trois morceaux obtenus ?

Pistes de travail

• On pourra représenter le spaghetti comme un segment de longueur 1 unité. Un premier nombre au hasard $x \in]0;1[$ représente la longueur de la première coupe en pourcentage de la longueur totale ; un deuxième nombre au hasard $y \in]0;1[$ représente la longueur de la deuxième coupe en pourcentage de la longueur du grand morceau.

• On pourra associer un point du plan à chaque couple $(x ; y)$.

Le problème n'étant pas classique, des pistes de travail sont proposées : il ne faut pas hésiter à les suivre !

1. Si possible, expérimenter avec quelques spaghettis de façon à mieux appréhender le problème.

2. Construire un triangle : le spaghetti (de longueur L) a été découpé en trois morceaux de longueurs a, b et c.

a. Déterminer la somme : $a+b+c$.

b. À quelles conditions (il y en a trois) les réels positifs a, b et c peuvent-ils représenter des longueurs permettant de former un triangle ?

3. Représenter : un schéma de la situation peut aider à mieux la comprendre.

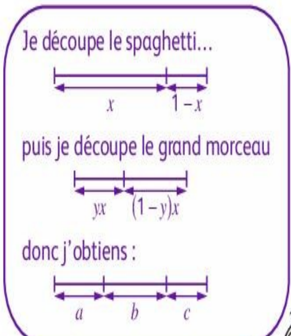
a. Dans le cas où x est supérieur à $\frac{1}{2}$, le grand morceau qui doit être redécoupé correspond à la première coupe.

Comprendre le schéma et justifier que quand $x \geqslant \frac{1}{2}$, les couples $(x ; y)$ permettant de construire un triangle vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{2} \\ y \leqslant \dfrac{1}{2x} \\ y \geqslant 1 - \dfrac{1}{2x} \end{cases}$$

b. Représenter le schéma correspondant à la situation où x est inférieur à $\frac{1}{2}$ et en déduire, que dans ce cas, les couples $(x ; y)$ permettant de construire un triangle vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ y \leqslant \dfrac{1}{2(1-x)} \\ y \geqslant 1 - \dfrac{1}{2(1-x)} \end{cases}$$



4. Associer un point du plan

a. Dans un repère, représenter l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient les conditions précédentes (on pourra s'aider d'un logiciel).

b. À l'aide de considérations géométriques, justifier que l'aire du domaine défini par l'ensemble des points M est le nombre $\mathcal{A} = 1 - 4\int_{0,5}^{1} \left(1 - \frac{1}{2x}\right) \mathrm{d}x$.

5. En déduire la probabilité, arrondie au millième, que Stéphanie arrive à construire un triangle.