Comportement asymptotique des fonctions - Exercices

Terminale générale
spécialité maths

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leqslant 3 \\ 2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

Déterminer les limites à gauche et à droite en 3 : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} f(x)$, et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x)$.

La fonction f est-elle continue en 3 ? Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x \leqslant -1 \\ -2x-1 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$

Déterminer les limites à gauche et à droite en -1 : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x)$, et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)$.

La fonction f est-elle continue en 1 ? Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 3 Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 + 3x^2 - 6$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+2}$ c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1-2x}{(x-3)^2}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - 3 + \dfrac{1}{x^2+x+1} \right)$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x + \dfrac{3}{e^x} + \dfrac{2x^2}{e^x} + x^3$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x + \dfrac{x}{e^x}$ g) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-2}{e^x - 1}$

Exercice 4 *Vrai ou faux* (Donner un contre exemple lorsque la proposition est fausse)

a. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

b. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)g(x)) = +\infty$

c. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$.

Exercice 5 On considère la fonction f définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$.

a. Montrer que si $x \neq 2$ et $1,9 < x < 2,1$, alors $f(x) > 100$.

b. Soit A un réel strictement positif. Déterminer un intervalle ouvert I contenant 2 tel que si $x \in I$ alors $f(x) > A$.

c. Que peut-on déduire en termes de limite pour la fonction f ?

Exercice 6 Déduire de chacune des limites suivantes, si possible, l'équation d'une asymptote verticale ou horizontale à la courbe représentative de la fonction f.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -\infty$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -6$ d) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ f) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ g) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Exercice 7 Déterminer les limites de la fonction f aux valeurs demandées, et préciser l'équation de l'éventuelle asymptote :

a) $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x^2}$ en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$ b) $f(x) = (4 - x^2)(3x - 2)$ en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$

c) $f(x) = 4x - 1 + \dfrac{1}{x-3}$ en 3, en $+\infty$ et en $-\infty$ d) $f(x) = \dfrac{4x}{4-x}$ en 0 et en 4

Exercice 8 Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{5-\dfrac{4}{x^2}}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2-\dfrac{1}{x}\right)^4$ c) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt{\dfrac{2-x}{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x^2+1}$

Exercice 9 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\sqrt{2x^3-3x+1}$ b) $f(x)=(2x+3)^5$ c) $f(x)=e^{2x-3}$

d) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{2x+1}}$ e) $f(x)=\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^7$ f) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-0,5x^2+1}}$

Exercice 10 Un capteur solaire récupère de la chaleur par le biais d'un fluide. On s'inétéresse à l'évolution de la température du fluide dans un capteur de 1m de longueur.

Cette température est modélisée par : $T(x)=170-150e^{-0,6x}$, où $x\in[0;1]$ est la distance, en mètres, parcourue par le fluide depuis son entrée dans le capteur, et $T(x)$ est la température en °C.

1. Déterminer la température à l'entrée du capteur.
2. a) Etudier les variations de la température T sur $[0;1]$.
   b) En déduire la température maximale, au degré près, atteinte par le fluide.
   c) Tracer dans un repère la courbe représentant la température T.

Exercice 11 Etudier sur $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes (sens de variations et limites) :

a) $f(x)=e^{-x}$ b) $g(x)=e^x+e^{-x}$ c) $h(x)=x+e^x$ d) $k(x)=e^{-x^2}$

Exercice 12 Determiner les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^5-6x^4+3x^2-12\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3+x+3\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x+2}{3x-7}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x^2+2x}{3x^3-7}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-x+\dfrac{1}{x^2}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to0} \left(x^2-x+\dfrac{1}{x^2}\right)$

Exercice 13 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x-\sqrt{x^2+1}$.

a. A quelle forme indéterminée la limite de f en $+\infty$ conduit-elle ?

b. Démontrer que, pour tout réel x positif, $f(x)=x\left(2-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 14 Soit f la fonction $x\mapsto\dfrac{ax+b}{2x-1}$ où a et b sont deux réels. f est représentée par la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Déterminer a et b tels que $f(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.
2. Déterminer les asymptotes à $\mathcal{C}$.
3. Dresser le tableau de variation de f, et tracer l'allure de $\mathcal{C}$.

Exercice 15 Soit φ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\varphi(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}$.

a) Dresser le tableau de variation de φ'.

b) En déduire le signe de φ' puis les variations de φ.

c) Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, on a $e^x \geqslant \dfrac{x^2}{2}$.

d) Déterminer la limite lorsque $x \to +\infty$ de $\dfrac{e^x}{x}$

Exercice 16 Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2 + 2 - e^x$ b) $g(x) = \dfrac{2e^x - x}{x^2}$ c) $h(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$

d) $l(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$ e) $k(x) = \dfrac{\sqrt{e^x+2}}{x}$ f) $t(x) = \dfrac{e^{2x}+x^2}{x^2+x-3}$

Exercice 17 Étudier (sens de variations et limites) sur $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{3x} - 3e^x$ b) $g(x) = (0,4x-2)e^{-0.1x}$

Exercice 18 *Vrai ou faux*

a. Si pour tout réel x, $f(x) \geqslant x^2$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b. Si pour tout réel x strictement positif, $f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c. Si pour tout réel x strictement positif, $1 \leqslant f(x) \leqslant x$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$.

Exercice 19 Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin(x)$.

Exercice 20 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = e^x - x$.

a) Dresser le tableau de variation de f.

b) En déduire le signe de $f(x)$ puis que, pour tout $x \geqslant 0$, $e^x > x$.

c) Déterminer la limite de e^x lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 21 Soit f définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

a. Montrer que pour tout $x \in D$, $f(x) = x + 1 + \dfrac{2}{x-1}$

b. Déterminer la limite en $-\infty$ et $+\infty$ de $f(x) - (x+1)$.

c. Quelle propriété peut-on en déduire quant à $\mathcal{C}_f$ et la droite $\Delta : y = x+1$?
Représenter ce résultat sur un graphique.

Exercice 22 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par l'expression $f(x) = \dfrac{-x^2+x+3}{x+2}$.

Montrer que la droite d'équation $y = -x+3$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f.

Exercice 23 Soit g la fonction définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par l'expression $g(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. Dresser le tableau de variation de g.
2. Déterminer les limites de g à gauche et à droite en 1.
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in D$, $g(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.
4. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

5. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $-\infty$ et $+\infty$.
6. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_g$.

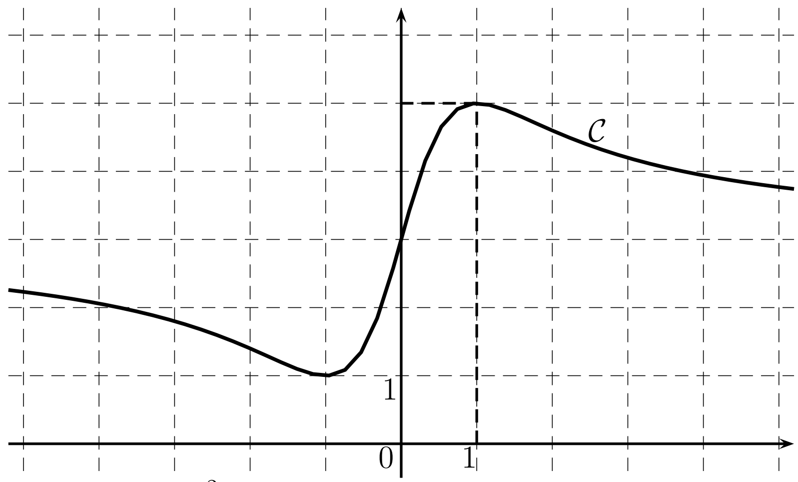
Exercice 24 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 3}{x + 2}$, et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ.
3. Représenter graphiquement ces résultats.

Exercice 25 **Exercice type Bac**

Partie A. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 + 1}$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ est donnée ci-contre.
La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en plus et moins l'infini.

Grâce aux renseignements donnés par le graphique, déterminer les réels a, b et c.



Partie B. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$.

1. Déterminer les réels α et β tels que, pour tout réel x, $f(x) = \alpha + \dfrac{\beta x}{x^2 + 1}$.
2. Dresser le tableau de variation complet de f.
3. Déterminer les positions relatives de la courbe représentative de f et de son asymptote.
4. a. Montrer que pour tout réel x, $\dfrac{f(x) + f(-x)}{2} = 3$.

   b. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
   (Indication : Considérer les points $M(x; f(x))$, $M(-x, f(-x))$ et $I(0; 3)$)

Partie C. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(|x|) = \dfrac{3x^2 + 4|x| + 3}{x^2 + 1}$.

1. Déterminer la limite de g en moins l'infini.
2. expliquer comment obtenir la courbe représentative de g à partir de celle de f.

Exercice 26 Déterminer les limites : a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$ b) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x\right)$