Logarithme népérien - Exercices

Terminale générale
spécialité maths

Exercice 1 On se place dans un RON, et on note d la droite d'équation $y = x$.

1. On considère les points $M(x; y)$ et $M'(y, x)$.
   a) Donner un vecteur directeur de d et montrer que $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à d.
   b) Montrer que les points M et M' sont symétriques par rapport à la droite d.
2. On considère la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction carré : $x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}_+$.
   a) Tracer l'allure de $\mathcal{C}$.
   b) Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}$. Préciser ses coordonnées et celles de son symétrique M' par rapport à d.
   c) Lorsque M décrit $\mathcal{C}$, la courbe de quelle fonction est décrite par M' ? Quel lien y-a-t'il entre la fonction carré et cette fonction ?

Exercice 2 1. Résoudre les équations : • $e^x = 1$ • $e^x = e$ • $e^x = \dfrac{1}{e}$

2. a) Montrer que pour tout réel strictement positif λ, l'équation $e^x = \lambda$ admet une unique solution.
   b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution de l'équation $e^x = 2$.

Exercice 3 Résoudre les équations : • $e^x = 5$ • $\ln(x) = -5$ • $\ln(2x-1) = -2$ • $\ln(1+x) = 100$

Exercice 4 Étudier le signe des expressions : a) $\ln(x-1)$ b) $\ln\left(\dfrac{x^2}{5x-6}\right)$

Exercice 5

a) Déterminer $\ln(2) + \ln(4) + \ln(8) + \ln(16)$ en fonction de $\ln(2)$.

b) Déterminer $\ln(3) + \ln(27) + \ln(81)$ en fonction de $\ln(3)$.

c) Simplifier les expressions : $\ln\left(5^2 \times 2^5\right)$ et $\ln\left(12\left(3^6\right)^2\right)$

d) Déterminer le domaine de définition des expressions suivantes et les exprimer en fonction de $\ln(x)$: $A(x) = \ln\left(3x^2\right)$; $B(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right) + \ln\left(x^2\right)$; $C(x) = \ln(x+4) - \ln\left(4x + x^2\right)$; $D(x) = \ln\left(x^3 - x^2\right) - \ln(x-1)$; $E(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) - \ln(2x)$

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{N}$, les inéquations suivantes : a) $3^n > 125$ b) $5^n \leqslant 10\,000$ c) $0,5^n < 0,001$ d) $\left(\dfrac{9}{10}\right)^n > 10^5$ e) $2^{n-5} > 3000$ f) $1 - 0,3^n > 0,95$ g) $\dfrac{4^n}{5^{n-1}} > 1$

Exercice 7 **QCM**

1. Le nombre $\ln(125)$ est égale à :
   a) $5\ln(3)$ b) $25\ln(5)$
   c) $3\ln(5)$ d) $5\ln(25)$

2. Le plus grand intervalle de définition de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(x^2 + x + 1\right)$ est :
   a) $]0; +\infty[$ b) $]-\infty; 0[$
   c) $[0; 1]$ d) $\mathbb{R}$.

3. Pour tout réel x, $\ln\left(x^2\right) = 2\ln(x)$:
   a) Vrai
   b) Faux

4. L'expression $\ln\left(\sqrt{2}\right)+\dfrac{1}{2}\ln(7)$ est égale à :

a) $\ln(\sqrt{14})$ b) $\dfrac{1}{2}\ln(14)$

c) $\dfrac{1}{2}\ln(9)$ d) $\ln(7)$

5. L'inéquation $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)x-1>3$ équivaut à :

a) $x>\dfrac{4}{\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)}$ b) $x\geqslant\dfrac{4}{\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)}$

c) $x<\dfrac{4}{\ln(2)-\ln(3)}$ d) $x>4-\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$

Exercice 8 Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q=1,5$ et de premier terme $u_0=2$. Quel est le sens de variation de (u_n) ? Quelle est sa limite ? Á partir de quel rang a-t-on $u_n>120$?

Exercice 9 Je possède 1000 euros sur un compte en banque. Chaque année ce compte me rapporte 4% d'intérêts (intérêts composés : chaque année le capital de l'année précédente est augmenté de 4%). Au bout de combien d'années le montant sur ce compte aura-t-il doublé ? triplé ?

Exercice 10 Soit f la fonction définie par l'expression $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.
Déterminer l'ensemble de définition de f, et montrer que sa courbe représentative admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

Exercice 11 Résoudre : • $\ln(x+1)=1$ • $\ln(x^2+6x+10)=0$ • $\ln(x)\geqslant 1$ • $\ln\left(x^2+1\right)\leqslant 1$
• $e^{3x-1}=3$ • $\dfrac{1}{e^{x-2}}=\sqrt{3}$ • $e^{-4x+2}-5=0$ • $e^{x^2-4}\leqslant 1$ • $\ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln(x+7)$
• $\ln(x^2-3)\leq\ln(x)+\ln(2)$ • $2(\ln(x))^2+5\ln(x)-3=0$ • $2(\ln(x))^2+5\ln(x)-3>0$
• $e^{2x}-5e^x+6=0$ • $e^{2x}-6e^x+4=0$ • $e^{2x}-7e^x+12>0$

Exercice 12 Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues x et y

$$\left\{\begin{array}{rcrcr}\ln(x)&+&\ln(y)&=&25\\2\ln(x)&+&\ln(y)&=&1\end{array}\right.,\quad\left\{\begin{array}{rcrcr}3e^x&+&e^y&=&4\\e^x&-&2e^x&=&-5\end{array}\right.\quad\text{et}\quad\left\{\begin{array}{rcl}\ln\left(x\sqrt{y}\right)&=&9\\2\ln(x)+\ln\left(y^3\right)&=&0\end{array}\right.$$

Exercice 13

a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction ln aux points d'abscisse 1 et e.

b) Tracer dans un repère la courbe $\mathcal{C}$ et ses deux tangentes.

c) Montrer que, pour tout réel $x>0$, $\ln(x)\leqslant x-1$.

Exercice 14 Déterminer les dérivées des fonctions suivantes : $f(x)=\ln\left(x^2\right)$; $g(x)=\ln\left(5x+2\right)$; $h(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $k(x)=2\ln\left(\sqrt{x}\right)$; $l(x)=\dfrac{3}{2}\ln\left(e^{2x+1}+3\right)$; $m(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$; $n(x)=-3x\ln\left(e^x+1\right)$

Exercice 15 Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition de $f:x\mapsto\dfrac{\ln(x)+2}{\ln(x)-1}$.

Exercice 16 Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln(x)$.

Exercice 17 Étudier la fonction définie pour tout $x>-1$ par $f(x)=\ln(x+1)+x^2+x+1$

Exercice 18 Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\Big(\ln(x)\Big)^2$.

Exercice 19 Etudier la fonction f définie par l'expression $f(x) = \ln(\ln(x))$.

Exercice 20 On note C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x^2$. On note de plus rexpectivement M_x et N_x les points de C_f et C_g d'abscisse x. Représenter graphiquement la situation. Pour quelle(s) valeur(s) de x la distance M_xN_x est-elle minimale ?

Exercice 21 Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \ln\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. a) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x - \ln(2)$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
   b) Etudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et justifier que $\alpha \in \left[1; \dfrac{5}{4}\right[$.
5. Tracer Δ et $\mathcal{C}_f$.

Exercice 22 Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$par $f(x) = (-x+3)\ln(x)$ et $g(x) = \dfrac{3}{x} - 1 - \ln(x)$.

Partie A.

1. Calculer la dérivée g' de g et en déduire les variations de g.
2. Calculer $g(1)$ et $g(2)$ et en déduire qu'il existe un unique $\alpha \in]0;+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie B. Calculer la dérivée f' de f et en déduire les variations de f.

Exercice 23 On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{x}\ln(x)$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. a) Etudier le sens de variation de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x - 1 + \ln(x)$.
   b) Vérifier que $g(1) = 0$. En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.
2. a) Montrer que pour tout réel x de $]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$. En déduire les variations de f.
   b) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   c) Dresser le tableau de variation de f, puis tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 24 Soit u la suite définie pour tout $n > 0$ par $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$.

I. Caculer u_1 et u_2, puis démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2(n+1)(2n+1)}$.

II. *Etude de la convergence de la suite u*

a) Démontrer que pour tout réel x strictement positif, $1 - \dfrac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul p, $\dfrac{1}{p+1} \leq \ln\left(\dfrac{p+1}{p}\right) \leq \dfrac{1}{p}$

III. Soit n un entier naturel non nul.

a) Ecrire l'encadrement précédent pour les valeurs n, $n+1$, ..., $2n-1$ de p.

b) En effectuant les sommes membre à membre des inégalités obtenues, démontrer que

$$u_n \leq \ln(2) \leq u_n + \frac{1}{2n}$$

IV. Prouver alors que la suite u converge vers $\ln(2)$.

Exercice 25 Soit f la fonction définie pour $x > 0$ par $f(x) = x^x$.

1. Justifier que $f(x) = e^{x \ln(x)}$.
2. Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = (1 + \ln(x))\ f(x)$. En déduire les variations de f et tracer l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 26 **Echelle de Richter** La magnitude d'un séisme, sur l'échelle de Richter, est évaluée à partir de l'amplitude A des ondes sismiques enregistrées sur un sismographe par la formule $M = \log(A) - \log(A_0)$, où A_0 désigne l'amplitude d'un séisme de référence.

1. On a mesuré l'amplitude d'un séisme et on a obtenu $A = 3,98\,10^7\,A_0$.
   Calculer la magnitude de ce séisme sur l'échelle de Richter.
2. La magnitude d'un séisme est 5. Déterminer le rapport $\dfrac{A}{A_0}$ de son amplitude à l'amplitude de référence.
3. A quelle variation d'amplitude correspond une variation de magnitude de 1 sur l'échelle de Richter.

Exercice 27 **pH d'une solution** La molarité en ions H^+ d'une solution est le nombre, noté $[H^+]$ de moles par litre d'ions H^+. $[H^+]$ s'exprime généralement par un nombre comportant une puissance négative de 10 (10^{-5} mol.L^{-1} par exemple). On lui préfère donc le pH défini par pH$= -\log([H^+])$.

1. Quel est le pH d'un solution contenant $3\,10^{-7}$ moles d'ions H^+ par litre ?
2. Quelle est la molarité en ions H^+ d'une solution neutre (pH$=7$) ?

Exercice 28 Étudier les fonctions f et g définies pour $x > 0$ par $f(x) = 0,5^x$ et $g(x) = 5^x$.
Tracer, sur un même graphique, l'allure de leur courbe représentative ainsi que la courbe de la fonction exponentielle.