1. Géométrie dans l'espace

1 Vecteurs de l'espace

1.1 Vecteurs et translations

Définition 1 : Un vecteur de l'espace est un objet mathématique caractérisé par une direction de l'espace, un sens et une longueur, également appelée norme.

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, la même norme et le même sens.

Définition 2 : Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ la transformation de l'espace qui, à tout point M, associe l'unique point M' tel que $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$.

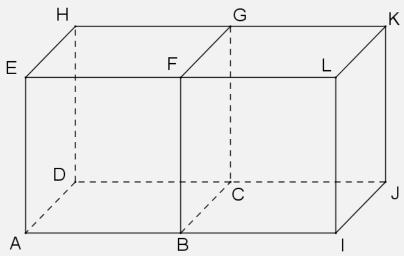
Toutes les notions vues en géométrie plane sur les vecteurs s'étendent dans l'espace : égalité de vecteurs, somme de vecteurs, produit d'un réel par un vecteur, relation de Chasles, vecteur nul, etc...

Il est donc fortement conseillé de revoir ces notions de la classe de Seconde avant de passer à la suite de ce chapitre.

Définition 3 : Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ des vecteurs et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réels.

Le vecteur $\vec{u}$ défini par $\vec{u} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\vec{u}_i$ est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$.

■ **Exemple 1 :** On considère deux cubes $ABCDEFGH$ et $BIJCFLKG$ placés côte à côte.



On a les égalités de vecteurs suivantes
- $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{IJ}$;
- $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{KI} = \overrightarrow{HB}$;
- $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EI}$.

■

Définition 4 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

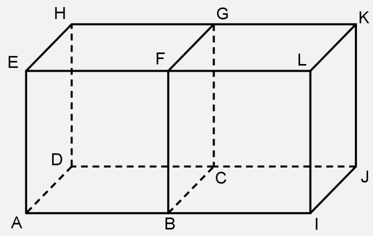
Le vecteur nul est ainsi colinéaire à tout vecteur de l'espace.

■ **Exemple 2 :** Sur la figure précédente, on a $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{HG}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont donc colinéaires. ■

Définition 5 : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ **ne sont pas colinéaires**.

On dit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$.

■ **Exemple 3 :** Sur la configuration suivante...



Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont coplanaires. En effet, on a $\overrightarrow{EL} = 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{FG}$. ■

2 Droites et plans de l'espace

2.1 Droites de l'espace

Définition 6 : Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace. La droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par A est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Une droite est donc entièrement déterminée par un point et un vecteur non nul. On dit que $(A;\vec{u})$ est un repère de la droite passant par A dirigée par $\vec{u}$. Une droite peut également être déterminée par deux points distincts.

La définition d'une droite à l'aide des vecteurs permet d'exploiter la colinéarité pour résoudre des problèmes d'alignement de points ou de parallélisme de droites.

Propriété 1 : Deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Propriété 2 : Soit A, B et C trois points de l'espace. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

2.2 Plans de l'espace

Définition 7 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et A un point du plan.

Le plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M pour lesquels le vecteur $\overrightarrow{AM}$ s'exprime comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Autrement dit, M appartient au plan passant par A, dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement s'il existe deux réels λ et μ tels que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}.$$

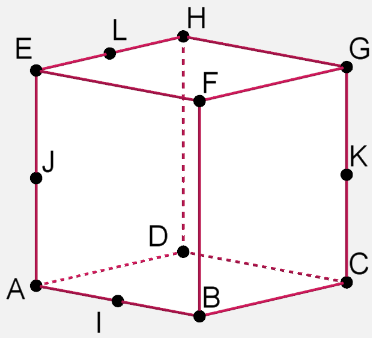
On dit que $(\vec{u};\vec{v})$ est une **base** de ce plan et que $(A;\vec{u},\vec{v})$ est un **repère** de ce plan.

Cette définition implique que par trois points **non alignés** de l'espace passe un unique plan.

Définition 8 : Soit A, B, C et D quatre points de l'espace. On dit que A, B, C et D sont coplanaires s'il existe un plan de l'espace passant par ces quatre points.

Propriété 3 : Soit A, B, C et D quatre points de l'espace. Les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

■ **Exemple 4 :** On considère un cube $ABCDEFGH$ ainsi que les points I, J, K et L, milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AE]$, $[CG]$ et $[EH]$



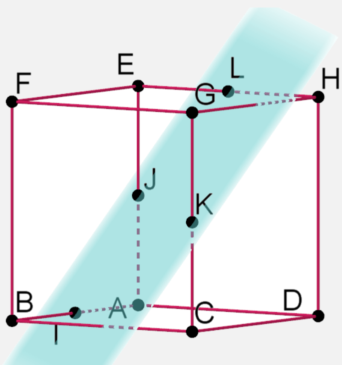
D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH}$. Or, J étant le milieu de $[AE]$, on a $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{JE}$.

De même, $\overrightarrow{EH} = 2\overrightarrow{EL}$. Ainsi, $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{JE} + 2\overrightarrow{EL} = 2\overrightarrow{JL}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont colinéaires. Les droites (AH) et (JL) sont donc parallèles.

De la même manière, on montre que $\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{JI}$.

On a $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{EG}$ D'après la relation de Chasles, on a donc $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EB}$.

En utilisant les points précédents, on a donc que $\overrightarrow{JK} = 2\overrightarrow{JL} + 2\overrightarrow{JI}$. Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$, $\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont donc coplanaires. Les points I, J, K et L sont donc coplanaires : ces quatre points appartiennent à un même plan.



■

2.3 Positions relatives

Positions relatives de deux droites

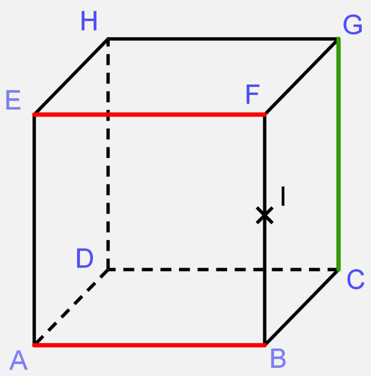
Définition 9 : Soit A, B, C et D quatre points distincts de l'espace. Les droites (AB) et (CD) sont dites coplanaires si les points A, B, C et D sont coplanaires.

Autrement dit, il existe un plan qui contiennent les droites (AB) et (CD).

Propriété 4 : Deux droites de l'espace coplanaires sont...

- parallèles ou confondues si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires,
- sécantes en un unique point sinon.

Exemple 5 : On considère un cube $ABCDEFGH$ ainsi qu'un point I sur le segment $[BF]$.



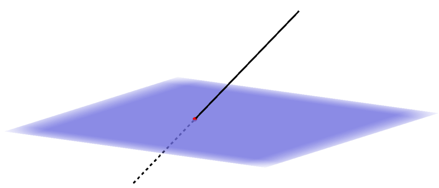
- Les droites (AB) et (EF) sont parallèles.
- Les droites (AB) et (CG) ne sont pas coplanaires.
- Les droites (HI) et (BD) sont coplanaires mais pas parallèles : elles sont donc sécantes.

Positions relatives d'une droite et d'un plan

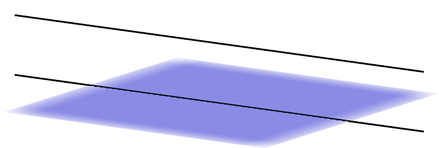
Propriété 5 : Une droite est...

- parallèle ou contenue dans un plan si tout vecteur de la droite est aussi un vecteur directeur du plan,
- sécante au plan en un unique point sinon.

Droite sécante à un plan



Droite parallèle à un plan



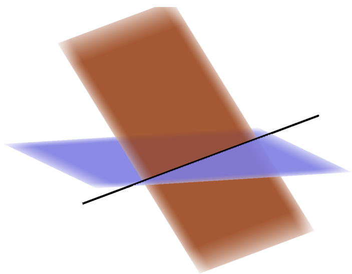
Exemple 6 : Dans le cube précédent, la droite (AE) est parallèle au plan (BDH). En revanche, cette droite est sécante au plan (IGH).

Positions relatives de deux plans

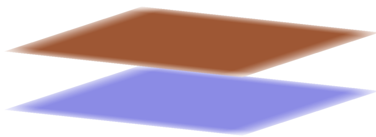
Propriété 6 : Deux plans de l'espace sont...

- parallèles ou confondus si les vecteurs directeurs de l'un sont aussi directeurs de l'autre,
- sécants sinon. L'intersection de ces deux plans est alors une droite.

Plans sécants selon une droite

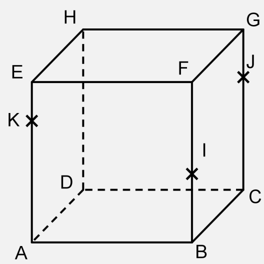


Plans parallèles

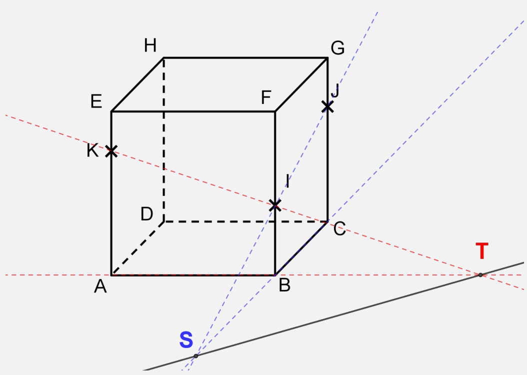


Il suffit donc de connaître deux points d'intersection A et B de deux plans pour déterminer toute leur intersection qui n'est autre que la droite (AB).

Exemple 7 : On considère le cube $ABCDEFGH$ suivant ainsi que trois points : I sur le segment $[BF]$, J sur le segment $[CG]$ et K sur le segment $[AE]$ de telles sorte que les droites (IK) et (AB) sont sécantes en un point T et que les droites (IJ) et (BC) sont sécantes en un point S.



- Puisque la droite (IJ) est dans le plan (IJK) et la droite (BC) est dans le plan (ABC), le point d'intersection de ces deux droites se trouve dans l'intersection des plans (ABC) et (IJK).
- Puisque la droite (IK) est dans le plan (IJK) et la droite (AB) est dans le plan (ABC), le point d'intersection de ces deux droites se trouve dans l'intersection des plans (ABC) et (IJK).
- L'intersection de deux plans sécants étant une droite, l'intersection des plans (ABC) et (IJK) est la droite (ST).



■

Propriété 7 : Pour montrer que deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles, il suffit de trouver deux droites sécantes non confondues (d_1) et (d_2) de $\mathscr{P}$ et deux droites sécantes non confondues (δ_1) et (δ_2) de $\mathscr{P}'$ telles que (d_1) est parallèle à (δ_1) et (d_2) est parallèle à (δ_2).

3 Repère de l'espace

Définition 10 : Un repère de l'espace est un quadruplet $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ où

- O est un point de l'espace ;
- $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs non coplanaires.

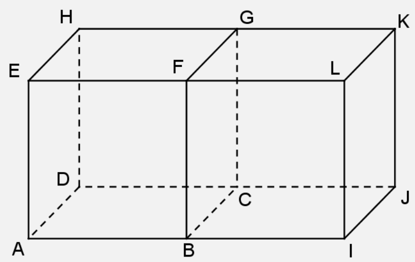
On dit que les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ forment une base de l'espace.

Propriété 8 : Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère de l'espace.

Il existe un unique triplet de réel $(x;y;z)$ tel que $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$.

x, y et z sont appelés les coordonnées du vecteur $\vec{u}$. On notera $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

■ **Exemple 8 :** On considère deux cubes $ABCDEFGH$ et $BIJCFLKG$ placés côte à côte.



Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG}$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ sont $\begin{pmatrix}0{,}5\\1\\1\end{pmatrix}$.

On a en effet $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$. ■

Définition 11 : Soit M un point de l'espace et $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère de l'espace. Les coordonnées du point M sont les réels $(x;y;z)$ tels que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. On notera $M(x;y;z)$.

■ **Exemple 9 :** Dans la figure précédente, on a $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}$

Le point K a pour coordonnées $(1{,}1{,}1)$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})$. ■

Propriété 9 : Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix}$.
- Le point I, milieu de $[AB]$, a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.

Démonstration 1 : On a $\overrightarrow{OA}=x_A\vec{\imath}+y_A\vec{\jmath}+z_A\vec{k}$ et $\overrightarrow{OB}=x_B\vec{\imath}+y_B\vec{\jmath}+z_B\vec{k}$. Or, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$. Ainsi,

$$\overrightarrow{AB}=x_B\vec{\imath}+y_B\vec{\jmath}+z_B\vec{k}-(x_A\vec{\imath}+y_A\vec{\jmath}+z_A\vec{k})=(x_B-x_A)\vec{\imath}+(y_B-y_A)\vec{\jmath}+(z_B-z_A)\vec{k}.$$

On retrouve bien le résultat attendu. Par ailleurs, si $I(x_I,y_I,z_I)$ est le milieu de $[AB]$, alors $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$.

On a donc, en regardant la première coordonnée de ces deux vecteurs, $x_I-x_A=x_B-x_I$ d'où $x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}$.

En faisant de même avec les deuxièmes et troisièmes coordonnées, on retrouve la formule attendue. □

■ **Exemple 10 :** On se place dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points $A(1;3;-4)$ et $B(2;7;-1)$. On note I le milieu du segment $[AB]$.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2-1 \\ 7-3 \\ -1-4 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.
- Le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{1+2}{2};\dfrac{3+7}{2};\dfrac{-4+(-1)}{2}\right)$ soit $\left(\dfrac{3}{2};5;-\dfrac{5}{2}\right)$.

■

Propriété 10 : Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Soit λ et μ des réels. Le vecteur $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda x+\mu x' \\ \lambda y+\mu y' \\ \lambda y+\mu y' \end{pmatrix}$.

■ **Exemple 11 :** On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ -15 \\ 9 \end{pmatrix}$ sont colinéaires. En effet, $\vec{v}=-3\vec{u}$. ■

■ **Exemple 12 :** Dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ? D'une part, les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

Supposons qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{u} = \lambda v + \mu w$. Alors $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda - \mu \\ 4\lambda + \mu \\ -7\lambda + 5\mu \end{pmatrix}$.

Nous sommes donc amenés à résoudre le système $\begin{cases} 2\lambda - \mu & = & 0 \\ 4\lambda + \mu & = & 6 \\ -7\lambda + 5\mu & = & 3 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 2\lambda - \mu & = & 0 \\ 4\lambda + \mu & = & 6 \\ -7\lambda + 5\mu & = & 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu & = & 2\lambda \\ 4\lambda + 2\lambda & = & 6 \\ -7\lambda + 10\lambda & = & 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu & = & 2\lambda \\ 6\lambda & = & 6 \\ 3\lambda & = & 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu & = & 2 \\ \lambda & = & 1 \\ \lambda & = & 1 \end{cases}$$

Le fait d'avoir deux fois la même ligne n'est pas anormal : nous avons trois équations pour deux inconnues. Si les résultats de ces deux lignes sont différents, cela signifie que les vecteurs ne sont pas coplanaires.

Vérifions que les valeurs trouvées pour λ et μ conviennent.

Les coordonnées de $\vec{v} + 2\vec{w}$ sont en effet $\begin{pmatrix} 2 + 2 \times (-1) \\ 4 + 2 \times 1 \\ -7 + 2 \times 5 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a donc $\vec{u} = \vec{v} + 2\vec{w}$. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont donc coplanaires.

■

4 Représentation paramétrique de droite

Propriété 11 : L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de l'espace.

On note (d) la droite passant par le point A et dirigée par $\vec{u}$.

Un point $M(x,y,z)$ appartient à la droite (d) si et seulement s'il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$.

Démonstration 2 : Le point M appartient à la droite (d) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Puisque $\vec{u}$ est non nul, cela revient à dire qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

Ainsi, $\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$. □

Définition 12 : Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace, $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de l'espace et (d) la droite passant par le point A et dirigée par $\vec{u}$.

Le système $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est appelé représentation paramétrique de la droite (d).

Attention ! Une représentation paramétrique de droite n'est pas unique !

■ **Exemple 13 :** La droite passant par le point $A(2;1;3)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ admet pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l}x=2+t\\y=1-3t\\z=3+2t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}$. ■

■ **Exemple 14 :** On considère la droite admettant pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l}x=5-2t\\y=8-4t\\z=3+t\end{array}\right.,t\in\mathbb{R}$.

Cette droite passe par le point $A(5{,}8{,}3)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\-4\\1\end{pmatrix}$. En prenant $t=2$, on obtient que cette droite passe par le point de coordonnées $(1;0;5)$.

Le point $B(-1;-4;5)$ appartient-il à cette droite ?

Supposons que ce soit le cas. Il existe alors un réel t tel que $5-2t=-1$, $8-4t=-4$ et $3+t=5$.

La résolution de ces équations donne successivement $t=3$, $t=3$ et $t=2$.

Il n'y a pas une unique valeur de t qui est trouvée : le point B n'appartient donc pas à la droite considérée. ■

■ **Exemple 15 :** On considère les droites (d) : $\left\{\begin{array}{l}x=4-t\\y=11-3t\\z=9-2t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}$ et (d') : $\left\{\begin{array}{l}x=2+t'\\y=6+4t'\\z=-2-5t'\end{array}\right.,\ t'\in\mathbb{R}$.

On souhaite déterminer, s'il existe, le point d'intersection de ces droites. Il faut donc trouver deux paramètres t et t'qui correspondent à un même point pour ces deux droites. Cela nous amène à résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}4-t=2+t'\\11-3t=6+4t'\\9-2t=-2-5t'\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2-t=t'\\11-3t=6+4(2-t)\\9-2t=-2-5(2-t)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2-t=t'\\11-3t=6+8-4t\\9-2t=-2-10+5t\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2-t=t'\\t=3\\t=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}t'=2-3=-1\\t=3\end{array}\right..$$

La solution que l'on trouve est unique, les droites sont donc sécantes en un point. Pour trouver les coordonnées de ce point, on remplace le paramètre t ou t'dans la représentation paramétrique de la droite correspondante (le mieux étant de le faire pour les deux pour contrôler nos calculs).

En prenant $t=3$ dans la représentation paramétrique de (d), on obtient le point de coordonnées $(1;2;3)$. De même, en prenant $t'=-1$ dans la représentation paramétrique de (d'), on aboutit également au point de coordonnées $(1;2;3)$. Ce point est le point d'intersection des droites (d) et (d'). ■

2. Exercices

Vecteurs de l'espace

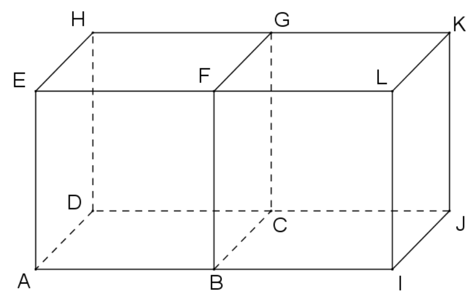
► Exercice 1 – Voir le corrigé

On considère deux cubes $ABCDEFGH$ et $BIJCFLKG$ placés côte à côte. Compléter les égalités de vecteurs suivantes.

$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{A\ldots}$ $\qquad$ $\overrightarrow{EK} + \overrightarrow{LF} = \overrightarrow{B\ldots}$

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{E\ldots}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{F\ldots}$

$\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{A\ldots}$ $\qquad$ $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{\ldots A}$

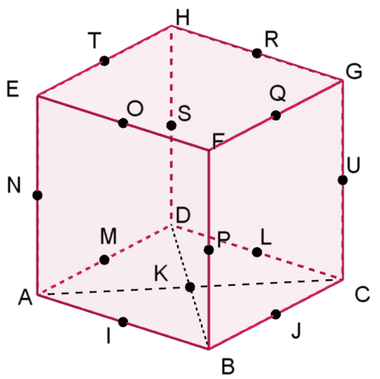


► Exercice 2 – Voir le corrigé

En utilisant la même figure, exprimer...

- ... le vecteur $\overrightarrow{AK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IK}$.
- ... le vecteur $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{JD}$.
- ... le vecteur $\overrightarrow{DL}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{JE}$.
- ... le vecteur $\overrightarrow{BK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{CG}$.

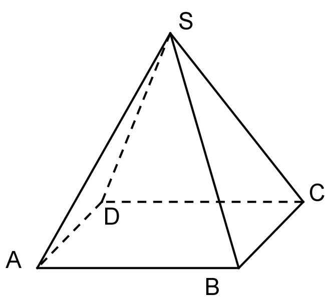
► Exercice 3 – Voir le corrigé



On considère un cube ABCDEFGH sur lequel on a placé les milieux des arêtes ainsi que le centre de la face ABCD. Donner...

- Un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{TR}$.
- Un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{OJ}$.
- Trois vecteurs colinéaires au vecteur $\overrightarrow{ML}$.
- Deux vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{DK}$.
- Deux vecteurs coplanaires à $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AD}$.

► Exercice 4 – Voir le corrigé

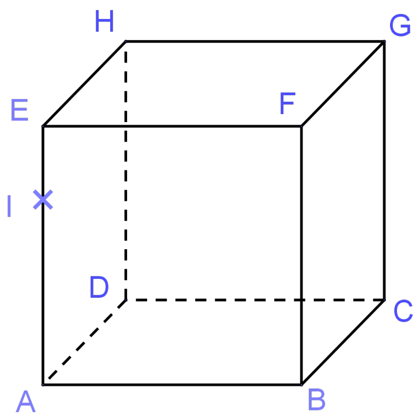


On considère une pyramide $SABCD$ à base carrée $ABCD$ et de sommet S.

On considère les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{SA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DS}$.
Montrer que $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.
Que peut-on en déduire sur ces trois vecteurs ?

Droites et plans de l'espace

▶ Exercice 5 – Voir le corrigé



On considère le $ABCDEFGH$ ci-contre, ainsi qu'un point I sur le segment $[AE]$.
Dans chacun des cas suivants, dire si les droites sont coplanaires ou non. Si oui, préciser si elles sont parallèles ou sécantes. Lorsqu'elles sont sécantes, construire le point d'intersection de ces droites.

(AB) et (FG)	(AF) et (IE)
(CD) et (EB)	(DI) et (EH)
(IB) et (FA)	(GF) et (DA)

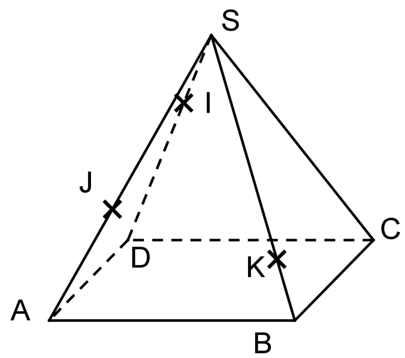
▶ Exercice 6 – Voir le corrigé

Sur le cube précédent, déterminer...

a. l'intersection du plan (EFH) avec le plan (ADH).
b. un plan parallèle au plan (BFG).
c. l'intersection du plan (IFB) avec le plan (HDB).
d. l'intersection du plan (GIC) avec le plan (HAD).
e. un plan parallèle au plan (IEB).
f. l'intersection de la droite (AI) et du plan (FGH).

▶ Exercice 7 – Voir le corrigé

On considère une pyramide $SABCD$ de sommet S et de base carrée. On place un point I sur $[DS]$, un point J sur $[AS]$ et un point K sur $[BS]$ de telle sorte que les droites (IJ) et (AD) ne sont pas parallèles, de même que les droites (IK) et (BD).



1. Justifier que les droites (IJ) et (AD) sont sécantes et construire leur point d'intersection.
2. Justifier que les droites (IK) et (BD) sont sécantes et construire leur point d'intersection.
3. Construire alors l'intersection des plans (ABD) et (IJK).
4. Sans justifier la construction, vérifier que l'intersection des droites (JK) et (AB) se trouve sur cette droite.

▶ Exercice 8 (Théorème du toit) – Voir le corrigé

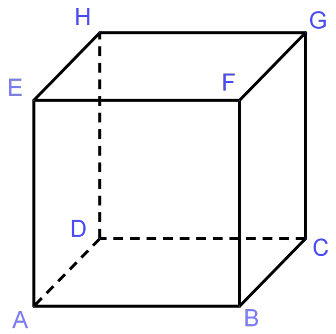
Soit P_1 et P_2 deux plans sécants et Δ la droite d'intersection de ces plans. Soit (d_1) une droite du plan P_1 et (d_2) une droite du plan P_2 telles que (d_1) et (d_2) sont parallèles.

En raisonnant par l'absurde, montrer que Δ est parallèle aux droites (d_1) et (d_2).

Repère de l'espace

▶ Exercice 9 – Voir le corrigé

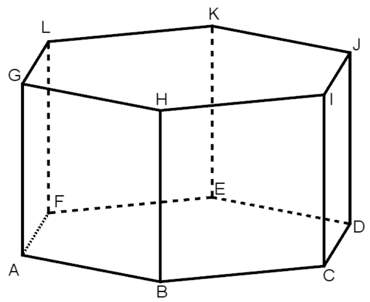
Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous, donner...



- ... les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BH}$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.
- ... les coordonnées du point F dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.
- ... les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AH})$.
- ... les coordonnées du point G dans le repère $(B;\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AH})$.
- ... les coordonnées du point I, milieu du segment $[BG]$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.
- ... les coordonnées du point J, milieu du segment $[FH]$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})$.

▶ Exercice 10 – Voir le corrigé

On considère un prisme droit $ABCDEFGHIJKL$ dont la base est un hexagone régulier $ABCDEF$.



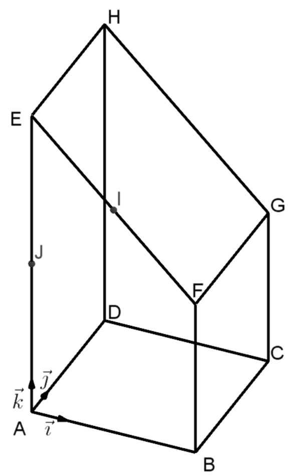
1. On se place dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AG})$.
   (a) Donner les coordonnées des points D, E, H et J dans ce repère.
   (b) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{GD}$ dans ce repère.
2. Reprendre les questions précédentes en se plaçant cette fois dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AH})$.

▶ Exercice 11 (Centres étrangers 2023) – Voir le corrigé

On considère le prisme droit $ABFEDCGH$ de base $ABFE$, rectangle en A. On associe à ce prisme le repère $(A\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ tel que

$$\vec{\imath}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\ \vec{\jmath}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \text{ et } \vec{k}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AE}.$$

De plus, on a $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.
On note I le milieu du segment $[EF]$ et J le milieu du segment $[AE]$.
Donner les coordonnées des points H, I et J.



▶ Exercice 12 – Voir le corrigé

On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $A(1;-1;2)$, $B(5;1;8)$, $C(-3;2;-1)$ et $D(-1;3;2)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. Que peut-on en déduire sur les droites (AB) et (CD) ?
3. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

► Exercice 13 – Voir le corrigé

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $A(1;3;5)$, $B(2;7;-1)$ et $C(5;19;-19)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire que les points A, B et C sont alignés.

► Exercice 14 – Voir le corrigé

On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $A(2;4;-1)$, $B(3;-2;5)$ et $C(6;7;-2)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer les coordonnées du point I, milieu de $[BC]$.
3. Déterminer les coordonnées du point J tel que $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
4. Déterminer les coordonnées du point K tel que C soit le milieu de $[AK]$.

► Exercice 15 – Voir le corrigé

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points $A(1;2;3)$, $B(3;-1;2)$, $C(0;1;1)$ et $D(5;1;6)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.
2. Montrer que ces trois vecteurs sont coplanaires. Que peut-on en déduire pour les points A, B C et D ?

► Exercice 16 – Voir le corrigé

On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points A, B, C, D et E de coordonnées respectives $A(2;2;0)$, $B(0;1;0)$, $C(1;0;1)$, $D(0;0;3)$ et $E(-1;4;0)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment-ils une base de l'espace ?
3. Donner les coordonnées du point E dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$.

Représentations paramétriques de droite

► Exercice 17 – Voir le corrigé

Donner une représentation paramétrique de la droite passant par le point $A(2;5;-3)$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix}$

► Exercice 18 – Voir le corrigé

On considère les points $A(1;3,-2)$ et $B(2;5;-4)$. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

► Exercice 19 – Voir le corrigé

On considère les points $A(1;2;7)$ et $B(3;-1;6)$ ainsi que la droite Δ admettant pour représentation paramétrique

$$\Delta : \begin{cases} x = 5-4t \\ y = 1+6t \\ z = -3+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1. Le point A appartient-il à la droite Δ ?
2. Les droites (AB) et Δ sont-elles parallèles ?
3. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point $C(6;-1;2)$ et parallèle à Δ.

► Exercice 20 – Voir le corrigé

On considère les droites (d_1) et (d_2) admettant pour représentations paramétriques

$$(d_1) : \begin{cases} x = -5+2t \\ y = 11-3t \\ z = 11-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (d_2) : \begin{cases} x = 7-4t' \\ y = 1-2t' \\ z = -2+5t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes en un point dont on donnera les coordonnées.

► Exercice 21 – Voir le corrigé

On considère les droites (d_1) et (d_2) admettant pour représentations paramétriques

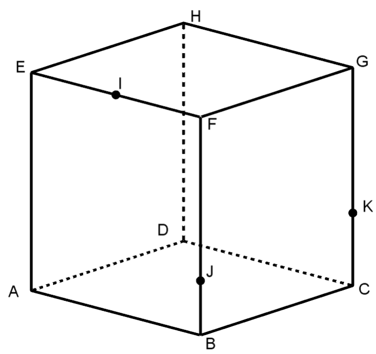
$$(d_1) : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3-t \\ z = -5+t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (d_2) : \begin{cases} x = 2+t' \\ y = -1 \\ z = 3+6t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas coplanaires.

Exercices de synthèse

► Exercice 22 – Voir le corrigé

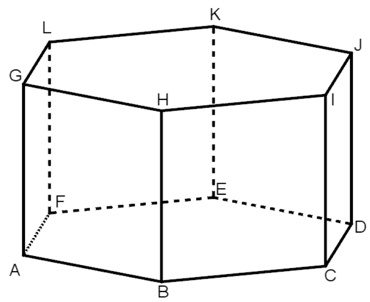
On se place dans un cube $ABCDEFGH$, d'arêtes de longueur 1. On note I le milieu du segment $[EF]$.
On considère par ailleurs le point J tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BF}$ et le point K tel que $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CG}$.
L'espace est muni du repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$



1. Montrer que les droites (IJ) et (AB) sont sécantes. On note M leur point d'intersection
2. A l'aide de deux autres droites sécantes, construire sur la figure ci-dessus, en justifiant la construction, l'intersection des plans (ABC) et (IJK)
3. On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{5}{9};1;1\right)$
   (a) Sur quelle arête se situe le point L ?
   (b) Montrer que les points I, J, K et L sont coplanaires.
   (c) En déduire que les droites (IK) et (LJ) sont sécantes.
   (d) Donner une équation paramétrique de ces deux droites et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

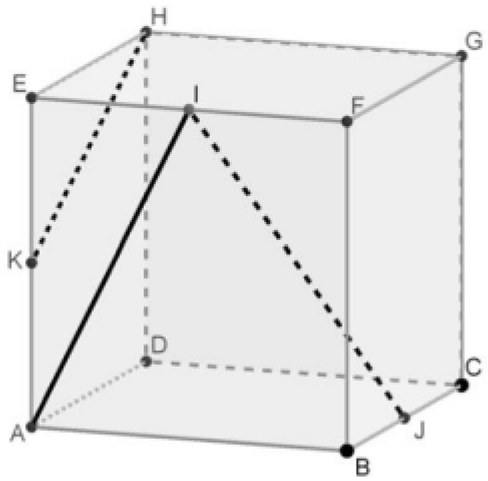
► Exercice 23 – Voir le corrigé

On considère un prisme droit $ABCDEFGHIJKL$ dont la base est un hexagone régulier $ABCDEF$. Les droites (AI) et (BK) sont-elles sécantes ?



► Exercice 24 (Amérique du Nord 2021) – Voir le corrigé

On considère un cube $ABCDEFGH$. Le point I est le milieu du segment $[EF]$, le point J est le milieu du segment $[BC]$ et le point K est le milieu du segment $[AE]$.



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

2. Donner les coordonnées des points I et J.
3. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

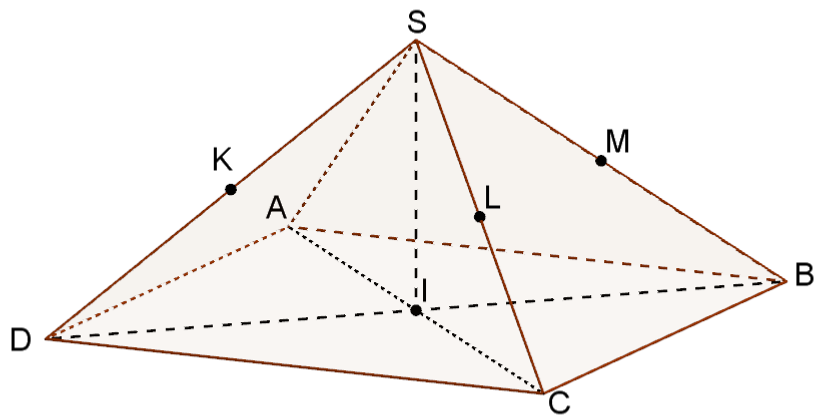
On considère les droites (d_1) et (d_2) définies par les représentations paramétriques ci-dessous.

$$(d_1) : \begin{cases} x = 3+t \\ y = 8-2t \\ z = -2+3t \end{cases} ,t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (d_2) : \begin{cases} x = 4+t \\ y = 1+t \\ z = 8+2t \end{cases} ,t \in \mathbb{R}$$

4. Les droites (d_1) et (d_2) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

► Exercice 25 (Métropole 2021) – Voir le corrigé

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte. Aucune justification n'est demandée.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée *ABCD* dont toutes les arêtes ont la même longueur. Le point I est le centre du carré *ABCD*.

On suppose que $IC = IB = IS = 1$. Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes $[SD]$, $[SC]$ et $[SB]$.

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé $(I, \overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IS})$. Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$I(0,0,0), A(-1,0,0), B(0,1,0), C(1,0,0), D(0,-1,0), S(0,0,1)$$

2. Les coordonnées du milieu N de $[KL]$ sont...

a. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$ sont...

a. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est

a. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **b.** $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

c. $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **d.** $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

3. Corrigés

Vecteurs de l'espace

▶ Correction 1 – Voir l'énoncé

On a $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EK}+\overrightarrow{LF}=\overrightarrow{BJ}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{EL}$, $\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{FL}$, $\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{EA}$.

▶ Correction 2 – Voir l'énoncé

On a $\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AK}+\frac{1}{2}\overrightarrow{JD}$, $\overrightarrow{DL}=2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{JE}$ et $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{CG}$.

▶ Correction 3 – Voir l'énoncé

On a $\overrightarrow{TR}=\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{TL}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{GE}$ sont colinéaires au vecteur $\overrightarrow{ML}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont colinéaires au vecteur $\overrightarrow{DK}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont coplanaires aux vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AD}$.
En effet, $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$.

▶ Correction 4 – Voir l'énoncé

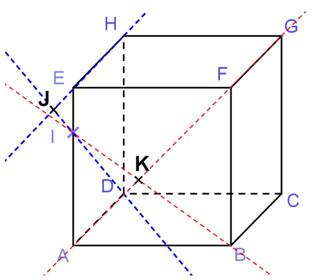
On a $\vec{u}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AS}$.

Par ailleurs, $\vec{v}+\vec{w}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DS}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DS}$.

Or, puisque $ABCD$ est un carré, alors $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. Ainsi, $\vec{v}+\vec{w}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DS}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AS}=\vec{u}$.

Droites et plans de l'espace

▶ Correction 5 – Voir l'énoncé



- (AB) et (FG) sont non coplanaires.
- (AF) et (IE) sont coplanaires et sécantes en A.
- (CD) et (EB) sont non coplanaires.
- (DI) et (EH) sont coplanaires et sécantes en J.
- (IB) et (FA) sont coplanaires et sécantes en K.
- (GF) et (DA) sont coplanaires et parallèles.

▶ Correction 6 – Voir l'énoncé

L'intersection du plan (EFH) avec le plan (ADH) est la droite (EH).

Le plan (AEH) est un plan parallèle au plan (BFG).

L'intersection du plan (IFB) avec le plan (HDB) est la droite (FB).

L'intersection du plan (GIC) avec le plan (HAD) est la droite (AE)

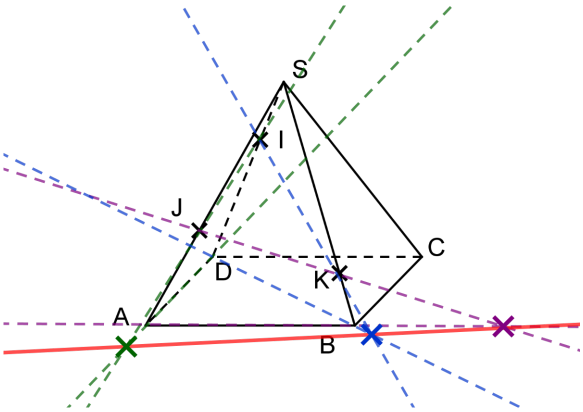
Le plan (HCG) est un plan parallèle au plan (IEB).

L'intersection de la droite (AI) et du plan (FGH) est le point E.

► Correction 7 – Voir l'énoncé

Les points I, J, A et D sont coplanaires (ils sont sur la face triangulaire de droite). Les droites (IJ) et (AD) sont donc coplanaires. Elles sont non parallèles et donc sécantes.

Les points I, K, B et D sont coplanaires (ils sont sur un triangle qui coupe le tétraèdre en deux). Les droites (IK) et (BD) sont donc coplanaires. Elles sont non parallèles et donc sécantes.



► Correction 8 – Voir l'énoncé

Supposons que Δ n'est pas parallèle à (d_1). Puisque (d_2) est parallèle à (d_1), on en déduit que Δ n'est pas non plus parallèle à (d_2).

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ et $\vec{v}$ un vecteur directeur de (d_1), et donc également de (d_2). Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc non colinéaires.

Puisque les droites (d_1) et Δ appartiennent toutes deux au plan P_1, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base du plan P_1.

Par ailleurs, puisque les droites (d_2) et Δ sont toutes deux contenues dans le plan P_2, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment également une base du plan P_2.

Par conséquent, les pans P_1 et P_2 admettent un même couple de vecteurs de bases, ces deux plans sont donc parallèles : c'est impossible puisque l'on a supposé que ces deux plans étaient sécants.

Par conséquent, la droite Δ est parallèle à la droite (d_1) et donc à la droite (d_2).

Repère de l'espace

► Correction 9 – Voir l'énoncé

On a $\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. Ses coordonnées dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ sont donc $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées du point F dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ sont $(1\,;0\,;1)$.

On a $\overrightarrow{CD} = 0\overrightarrow{AC} - 1\overrightarrow{AG} + 1\overrightarrow{AH}$. Ses coordonnées dans le repère $(A;\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AH})$ sont donc $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{BG} = 0\overrightarrow{AC} + 0\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AH}$. Les coordonnées du point G dans le repère $(B;\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AH})$ sont $(0\,;0\,;1)$.

Les coordonnées du point I, milieu de $[BG]$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ sont $\left(1\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.

Les coordonnées du point J, milieu de $[FH]$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})$ sont $\left(1\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$. Attention à l'ordre des vecteurs !

► Correction 10 – Voir l'énoncé

Dans $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AG})$, on a $D(2\,;2\,;0)$, $E(1\,;2\,;0)$, $H(1\,;0\,;1)$, $J(2\,;2\,;1)$, $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$.

Dans $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AH})$, on a $D(1\,;1\,;0)$, $E(0\,;1\,;0)$, $H(0\,;0\,;1)$, $J(0\,;1\,;1)$, $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

► Correction 11 – Voir l'énoncé

Le point H a pour coordonnées $(0;4;8)$.

Le point E a pour coordonnées (0,0,8). Le point F a pour coordonnées (4,0,4). Puisque I est le milieu de $[EF]$, ses coordonnées sont $\left(\frac{0+4}{2},\frac{0+0}{2},\frac{8+4}{2}\right)$ soit (2,0,6).

Le point E a pour coordonnées (0,0,8). Le point A a pour coordonnées (0,0,0). Puisque J est le milieu de $[AE]$, ses coordonnées sont $\left(\frac{0+0}{2},\frac{0+0}{2},\frac{8+0}{2}\right)$ soit (0,0,4).

► Correction 12 – Voir l'énoncé

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-1\\1-(-1)\\8-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3-2\\2-(-1)\\-1-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\3\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1-(-3)\\3-2\\2-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$.

On remarque que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Par conséquent, ces droites sont également coplanaires. Les points A, B, C et D sont donc coplanaires.

► Correction 13 – Voir l'énoncé

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-1\\7-3\\5-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5-2\\19-7\\-19-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\12\\-18\end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. De plus, les droites (AB) et (AC) ont un point en commun. Ainsi, les points A, B et C sont alignés.

► Correction 14 – Voir l'énoncé

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-2\\-2-4\\5-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-6\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6-2\\7-4\\-2-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires (on ne passe pas des coordonnées de l'un à l'autre en multipliant par un réel). Les points A, B et C ne sont pas alignés.

Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{3+6}{2};\frac{-2+7}{2};\frac{5+(-2)}{2}\right)$ soit $\left(\frac{9}{2};\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Notons $(x;y;z)$ les coordonnées du point J. Les coordonnées de $\overrightarrow{AJ}$ sont $\begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \\ z+1 \end{pmatrix}$. Les coordonnées de $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ sont $\begin{pmatrix} 2\times 1+4 \\ 2\times(-6)+3 \\ 2\times 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 13 \end{pmatrix}$. On a alors

- $x-2=6$ d'où $x=8$;
- $y-4=-9$ d'où $y=-5$;
- $z+1=13$ d'où $z=12$.

Les coordonnées du point J sont $(8;-5;12)$.

Notons $(x;y;z)$ les coordonnées du point K. Le milieu de $[AK]$ a pour coordonnées $\left(\frac{2+x}{2};\frac{4+y}{2};\frac{-1+z}{2}\right)$. Puisqu'il doit s'agir du point $C(6;7;-2)$, on a donc $\frac{2+x}{2}=6$ soit $x=10$, $\frac{4+y}{2}=7$ d'où $y=10$ et enfin $\frac{-1+z}{2}=-2$ d'où $z=-3$.

Les coordonnées de K sont donc $(10;10;-3)$.

► Correction 15 – Voir l'énoncé

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-1 \\ -1-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 5-1 \\ 1-2 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Supposons qu'il existe des réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{AD}$ On a alors

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda+4\mu \\ -\lambda-\mu \\ -2\lambda+3\mu \end{pmatrix}.$$

D'après la deuxième équation, on a $-3=-\lambda-\mu$ et donc $\lambda=3-\mu$.

D'après la première équation, on a $-\lambda+4\mu=2$. On remplace alors λ par $3-\mu$ et on a donc $-(3-\mu)+4\mu=2$ soit $-3+\mu+4\mu=2$ ou encore $5\mu=5$ et donc $\mu=1$.

En remplaçant μ par 1, on trouve alors $\lambda=3-1=2$.

On peut alors vérifier que $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires. Les points A, B, C et D sont donc sur un même plan.

► Correction 16 – Voir l'énoncé

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cette deuxième question revient à déterminer si ces trois vecteurs sont coplanaires. Supposons qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{AD}$. En utilisant les coordonnées, on a alors $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda-2\mu \\ -2\lambda-2\mu \\ \lambda+3\mu \end{pmatrix}$.

- En utilisant la troisième égalité, on a $0=\lambda+3\mu$ et donc $\lambda=-3\mu$;
- En remplaçant λ par -3μ dans la première équation, on a alors $-2=3\mu-2\mu$ soit $-2=\mu$;
- En remplaçant μ par -2 on a $\lambda=-3\times(-2)=6$;

- Vérifions les coordonnées de $\lambda\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{AD}$ avec $\lambda = 6$ et $\mu = -2$. On obtient

$$\begin{pmatrix} -6-2\times(-2) \\ -2\times 6-2\times(-2) \\ 6+3\times(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ce qui n'est pas le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires, ils forment donc une base de l'espace.

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$, il existe un unique triplet de réels (x,y,z) tels que $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}$. Ces réels sont les coordonnées du point E dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$. En utilisant les coordonnées des vecteurs, on a alors

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x-y-2z \\ -x-2y-2z \\ y+3z \end{pmatrix}.$$

- En utilisant la dernière ligne, on a $y+3z = 0$ et donc $y = -3z$.
- En remplaçant y par $-3z$ dans la deuxième équation, on obtient $2 = -x-2\times(-3z)-2z$ soit $2 = -x+6z-2z$ c'est-à-dire $2 = -x+4z$. On a donc $x = -2+4z$.
- En remplaçant y par $-3z$ et x par $-2+4z$ dans la première équation, on obtient $-3 = -2x-y-2z$ soit $-3 = -2(-2+4z)-(-3)z-2z$ soit $-3 = 4-8z+3z-2z$ et donc $-7 = -7z$ d'où $z = 1$.
- Puisque $y = -3z$, on a $y = -3$.
- Puisque $x = -2+4z$, $x = -2+4 = 2$.

On calcule alors les coordonnées de $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$. elles valent

$$\begin{pmatrix} -2\times 2-(-3)-2\times 1 \\ -2-2\times(-3)-2\times 1 \\ -3+3\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

qui sont bien les coordonnées de $\overrightarrow{AE}$. Ainsi, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}+-3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$. Les coordonnées de E dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ sont donc $(2;-3;1)$.

Représentations paramétriques de droite

▶ Correction 17 – Voir l'énoncé

Cette droite admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 5+2t \\ z = -3-3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

▶ Correction 18 – Voir l'énoncé

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 3+2t \\ z = -2-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

▶ Correction 19 – Voir l'énoncé

Le point A appartient à la droite Δ si et seulement s'il existe un réel t tel que $\begin{cases} 1 = 5-4t \\ 2 = 1+6t \\ z = 7+2t \end{cases}$.

La première ligne donne alors $t = 1$. Mais si $t = 1$, alors la deuxième ligne donne $2 = 7$. Ainsi, un tel réel t n'existe pas : le point A n'appartient pas à la droite (AB).

Un vecteur directeur de (AB) est le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$. Un vecteur directeur de Δ est le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\6\\2\end{pmatrix}$. On a $\vec{u} = -2\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc colinéaires : les droites (AB) et Δ sont donc parallèles.

La droite (d) admet le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur. Une représentation paramétrique de cette droite est donc $\begin{cases} x = 6+2t \\ y = -1-3t \\ z = 2-t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

► Correction 20 – Voir l'énoncé

Supposons que les droites (d_1) et (d_2) soient sécantes en un point $M(x;y;z)$. Il existe alors deux réels t et t' tels que $\begin{cases} x = -5+2t = 7-4t' \\ y = 11-3t = 1-2t' \\ z = 11-2t = -2+5t' \end{cases}$

En remplaçant la troisième ligne par la somme des lignes 1 et 3, on a alors $\begin{cases} -5+2t = 7-4t' \\ 11-3t = 1-2t' \\ 6 = 5+t' \end{cases}$.

On trouve alors $\begin{cases} -5+2t = 7-4t' \\ 11-3t = 1-2t' \\ t' = 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} -5+2t = 7-4 \\ 11-3t = 1-2 \\ t' = 1 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} t = 4 \\ t' = 1 \end{cases}$.

Vérifions : en remplaçant t par 4 dans l'équation de (d_1), on obtient le point de coordonnées $(3;-1;3)$. En remplaçant t' par 1 dans l'équation de (d_2), on obtient le point de coordonnées $(3;-1;3)$.

Ainsi, les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes et les coordonnées du point d'intersection des droites (d_1) et (d_2) sont donc $(3;-1;3)$.

► Correction 21 – Voir l'énoncé

Un vecteur directeur de (d_1) est $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$. Un vecteur directeur de (d_2) est $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, les droites (d_1) est (d_2) ne sont donc pas parallèles.

Supposons que ces droites sont sécantes. Il existe donc deux réels t et t' tels que $\begin{cases} 1+2t = 2+t' \\ 3-t = -1 \\ -5+t = 3+6t' \end{cases}$.

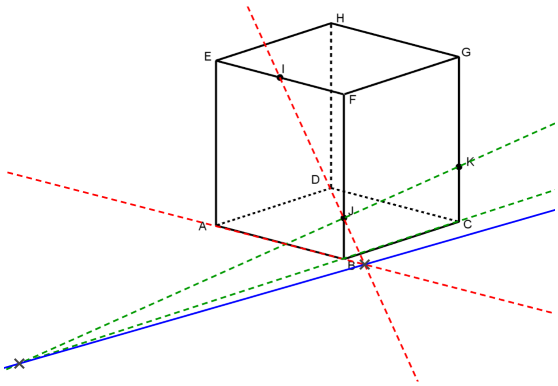
La deuxième ligne donne $t = 4$. En remplaçant t par 4 dans la première ligne, on obtient $t' = 7$. En remplaçant t par 4 dans la troisième ligne on obtient $t' = -\frac{2}{3}$. On a donc une contradiction. Par conséquent, les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas sécantes.

Finalement, les droites (d_1) et (d_2) n'étant ni parallèles, ni sécantes, elles ne sont pas coplanaires.

Exercices de synthèse

▶ Correction 22 – Voir l'énoncé

1. Les droites (IJ) est (AB) sont coplanaires puisque les 4 points cités se trouvent sur une même face. Par ailleurs, on trouve les coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1/2\\0\\-3/4\end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires : les droites (IJ) et (AB) ne sont donc pas parallèles. Elles sont donc sécantes en un point M.
2. Les droites (JK) est (CB) sont coplanaires puisque les 4 points cités se trouvent sur une même face. Par ailleurs, on trouve les coordonnées $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1/12\end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires : les droites (KJ) et (CB) ne sont donc pas parallèles. Elles sont donc sécantes en un point N.
   Ainsi, les points M et N appartiennent à l'intersection des plans (ABC) et (IJK). L'intersection de ces deux plans est par conséquent la droite (MN).



3. (a) Le point L se situe sur l'arête $[HG]$.
   (b) On a $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1/2\\0\\-3/4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1/2\\1\\-2/3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}1/18\\1\\0\end{pmatrix}$. Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{IJ}=a\overrightarrow{IK}+b\overrightarrow{IL}$. On aurait alors

   $$\begin{pmatrix}1/2\\0\\-3/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a/2+b/18\\a+b\\-2a/3\end{pmatrix}.$$

   D'après la troisième ligne, on a $a=\dfrac{9}{8}$. En utilisant la deuxième ligne, on trouve alors $b=-\dfrac{9}{8}$.
   Vérifions : on calcule les coordonnées de $\dfrac{9}{8}\overrightarrow{IK}-\dfrac{9}{8}\overrightarrow{IL}$. On obtient $\begin{pmatrix}9/16-1/16\\9/8-9/8\\-2/3\times 9/8\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}1/2\\0\\-3/4\end{pmatrix}$.
   On retrouve bien les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$. Les points I, J, K et L sont coplanaires.
   Ainsi, les droites (IK) et (LJ) sont coplanaires.
   (c) Or, elles ne sont pas parallèles. Ces droites sont donc sécantes.
   (d) On a $(IK)\quad:\quad\begin{cases}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\\y=t\\z=1-\frac{2}{3}t\end{cases},t\in\mathbb{R}$ et $(LJ)\quad:\quad\begin{cases}x=\frac{5}{9}+\frac{4}{9}t'\\y=1-t'\\z=1-\frac{3}{4}t'\end{cases},t'\in\mathbb{R}.$

Cherchons donc deux réels t et t' tels que $\begin{cases} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t=\frac{5}{9}+\frac{4}{9}t' \\ t=1-t' \\ 1-\frac{2}{3}t=1-\frac{3}{4}t' \end{cases},t'\in\mathbb{R}$.

En remplaçant t par $1-t'$ dans la dernière équation, on a $-\dfrac{2}{3}(1-t')=-\dfrac{3}{4}t'$ soit $\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{3}\right)t'=\dfrac{2}{3}$ d'où $\dfrac{17}{12}t'=\dfrac{2}{3}$ et $t'=\dfrac{12}{17}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{17}$.

Remplaçons alors t' par $\dfrac{8}{17}$ dans l'équation de la droite (LJ). On a $\frac{5}{9}+\frac{4}{9}\times\dfrac{8}{17}=\dfrac{13}{17}$, $1-\dfrac{8}{17}=\dfrac{9}{17}$ et $1-\frac{3}{4}\times\dfrac{8}{17}=\dfrac{11}{17}$.

Le point d'intersection des droites (IK) et (LJ) a pour coordonnées $\left(\dfrac{13}{17};\dfrac{9}{17};\dfrac{11}{17}\right)$.

► Correction 23 – Voir l'énoncé

On se place dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AG})$. On a alors les coordonnées des vecteurs suivantes :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

Supposons qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AI}+\mu\overrightarrow{AK}$. On a alors

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\lambda+\mu\\\lambda+2\mu\\\lambda+\mu\end{pmatrix}.$$

La dernière ligne nous donne $\lambda=-\mu$. On remplaçant λ par $-\mu$ dans la seconde ligne, on a alors $\mu=0$ et donc $\lambda=0$. Or, si on remplace λ et μ par 0 dans la première ligne, on obtient $1=0$, ce qui est absurde.

Ainsi, les points A, B, I et K ne sont pas coplanaires. Les droites (AI) et (BK) ne sont donc pas coplanaires. Elles ne peuvent donc pas être sécantes.

► Correction 24 – Voir l'énoncé

1. Les points A, I et K appartiennent au même plan (la face avant du cube). Le point H n'appartient pas à ce plan. Les points A, I, K et H ne sont donc pas coplanaires. Les droites (AI) et (KH) ne peuvent donc pas être parallèles.
2. On a $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ et $J\left(1;\frac{1}{2};0\right)$.
3. On a $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.
4. La droite (d_1) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$. La droite (d_2) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

   Ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Les droites (d_1) et (d_2) ne sont donc pas parallèles.

► Correction 25 – Voir l'énoncé

1. Réponse **c.** : (DK) et (SD) ont un point en commun et sont donc sécantes. (AC) et (IC) sont sécantes en A, (LM) et (AD) sont parallèles et donc coplanaires.

2. Réponse **a.** : K a pour coordonnées $\left(0;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, L a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2};0;\dfrac{1}{2}\right)$. Le point N a donc pour coordonnées la moyenne des coordonnées de ces deux points, soit $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$.

3. Réponse **b.** On a $\overrightarrow{AS} = 1\overrightarrow{IC} + 0\overrightarrow{IB} + 1\overrightarrow{IS}$. Ses coordonnées sont donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Attention à l'ordre des vecteurs de la base !

4. Réponse **c.** En prenant $t = 0$, on retrouve le point S. En prenant $t = -1$, on retrouve le point A.