Géométrie dans l'espace

1 Vecteurs de l'espace

1.1 Vecteurs et translations

Définition 1 : Un vecteur de l'espace est un objet mathématique caractérisé par une direction de l'espace, un sens et une longueur, également appelée norme.

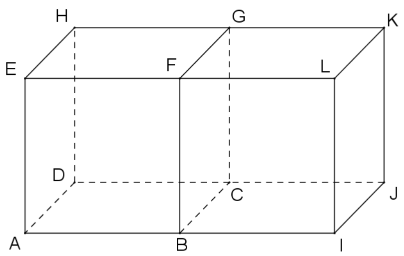
Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, la même norme et le même sens.

Définition 2 : Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ la transformation de l'espace qui, à tout point M, associe l'unique point M' tel que $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$

R Toutes les notions vues en géométrie plane sur les vecteurs s'étendent dans l'espace : égalité de vecteurs, somme de vecteurs, produit d'un réel par un vecteur, relation de Chasles, vecteur nul, etc...

Définition 3 : Soit $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ..., $\vec{u}_n$ des vecteurs et λ_1, λ_2, ..., λ_n des réels.

Le vecteur $\vec{u}$ défini par $\vec{u} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\vec{u}_i$ est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ..., $\vec{u}_n$.



■ **Exemple 1 :** On considère deux cubes $ABCDEFGH$ et $BIJCFLKG$ placés côte à côte. On a les égalités de vecteurs suivantes

- $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{IJ}$
- $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{KI} = \overrightarrow{HB}$
- $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EI}$

■

2 Droites et plans de l'espace

2.1 Droites de l'espace

Définition 4 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

R Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur de l'espace.

Définition 5 : Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace. La droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par A est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

R Une droite est donc entièrement déterminée par un point et un vecteur non nul. On dit que $(A; \vec{u})$ est un repère de la droite passant par A dirigée par $\vec{u}$. Une droite peut également être déterminée par deux points distincts.

Propriété 1 : Deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Propriété 2 : Soit A, B et C trois points de l'espace. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

2.2 Plans de l'espace

Définition 6 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et A un point du plan.

Le plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M pour lesquels le vecteur $\overrightarrow{AM}$ s'exprime comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Autrement dit, M appartient au plan passant par A, dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement s'il existe deux réels λ et μ tels que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

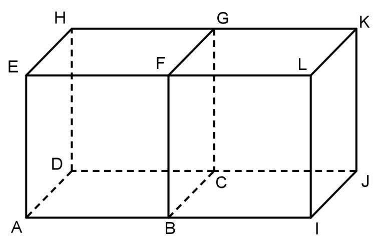
On dit que $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère de ce plan.

R Cette définition implique que par trois points non alignés de l'espace passe un unique plan.

Définition 7 : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

On dit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$

■ **Exemple 2 :** Sur la configuration suivante...

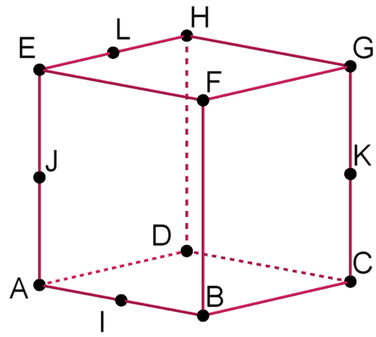


Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont coplanaires. En effet, $\overrightarrow{EL} = 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{FG}$. ■

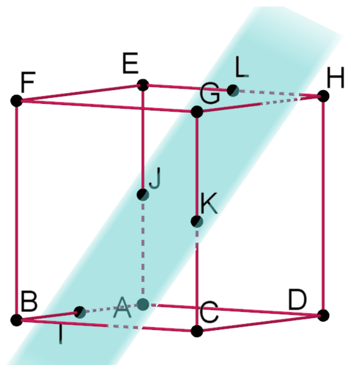
Définition 8 : Soit A, B, C et D quatre points de l'espace. On dit que A, B, C et D sont coplanaires s'il existe un plan de l'espace passant par ces quatre points.

Propriété 3 : Soit A, B, C et D quatre points de l'espace. Les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

■ **Exemple 3 :** On considère un cube $ABCDEFGH$ ainsi que les points I, J, K et L, milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AE]$, $[CG]$ et $[EH]$



- D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH}$. Or, J étant le milieu de $[AE]$, on a $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{JE}$. De même, $\overrightarrow{EH} = 2\overrightarrow{EL}$. Ainsi, $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{JE} + 2\overrightarrow{EL} = 2\overrightarrow{JL}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont colinéaires. Les droites (AH) et (JL) sont donc parallèles.
- De la même manière, on montre que $\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{JI}$.
- On a $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{EG}$ D'après la relation de Chasles, on a donc $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EB}$. En utilisant les points précédents, on a donc que $\overrightarrow{JK} = 2\overrightarrow{JL} + 2\overrightarrow{JI}$. Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$, $\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont donc coplanaires. Les points I, J, K et L sont donc coplanaires : ces quatre points appartiennent à un même plan.



■

2.3 Positions relatives

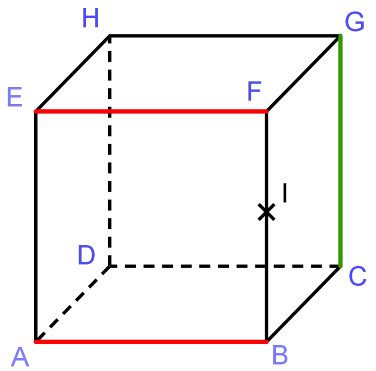
Positions relatives de deux droites

Définition 9 : Soit A, B, C et D quatre points distincts de l'espace. Les droites (AB) et (CD) sont dites coplanaires si les points A, B, C et D sont coplanaires.

Autrement dit, il existe un plan qui contiennent les droites (AB) et (CD).

Propriété 4 : Deux droites de l'espace coplanaires sont...

- parallèles ou confondues si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires,
- sécantes en un unique point sinon.



■ **Exemple 4 :** On considère un cube $ABCDEFGH$ ainsi qu'un point I sur le segment $[BF]$.

- Les droites (AB) et (EF) sont parallèles.
- Les droites (AB) et (CG) ne sont pas coplanaires.
- Les droites (HI) et $[BD]$ sont coplanaires mais pas parallèles : elles sont donc sécantes.

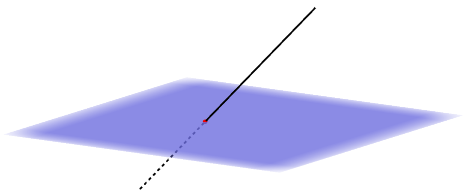
■

Positions relatives d'une droite et d'un plan

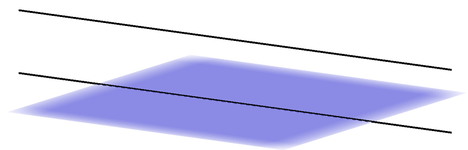
Propriété 5 : Une droite est...

- parallèle ou contenue dans un plan si tout vecteur de la droite est aussi un vecteur directeur du plan,
- sécante au plan en un unique point sinon.

Droite sécante à un plan



Droite parallèle à un plan

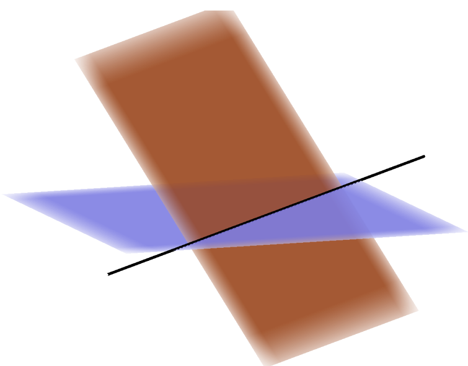


Positions relatives de deux plans

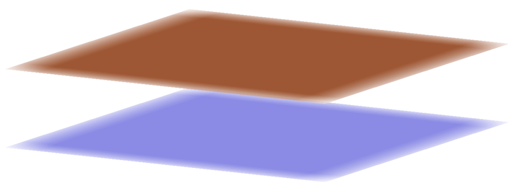
Propriété 6 : Deux plans de l'espace sont...

- parallèles ou confondus si les vecteurs directeurs de l'un sont aussi directeurs de l'autre,
- sécants sinon. L'intersection de ces deux plans est alors une droite.

Plans sécants selon une droite

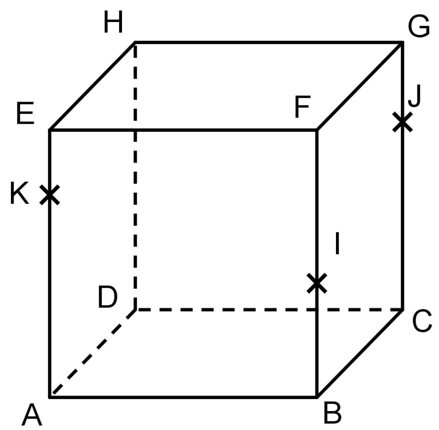


Plans parallèles

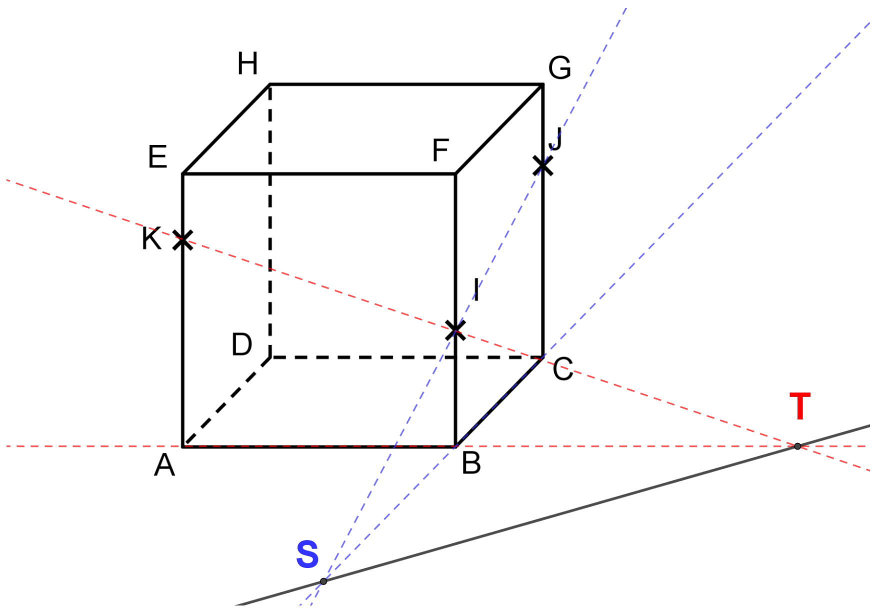


R Il suffit donc de connaître deux points d'intersection A et B de deux plans pour déterminer toute leur intersection qui n'est autre que la droite (AB).

■ **Exemple 5 :** On considère le cube $ABCDEFGH$ suivant ainsi que trois points : I sur le segment $[BF]$, J sur le segment $[CG]$ et K sur le segment $[AE]$ de telles sorte que les droites (IK) et (AB) sont sécantes en un point T. et que les droites (IJ) et (BC) sont sécantes en un point S.



- Puisque la droite (IJ) est dans le plan (IJK) et la droite (BC) est dans le plan (ABC), le point d'intersection de ces deux droites se trouve dans l'intersection des plans (ABC) et (IJK).
- Puisque la droite (IK) est dans le plan (IJK) et la droite (AB) est dans le plan (ABC), le point d'intersection de ces deux droites se trouve dans l'intersection des plans (ABC) et (IJK).
- L'intersection de deux plans sécants étant une droite, l'intersection des plans (ABC) et (IJK) est la droite (ST).



■

Propriété 7 : Pour montrer que deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles, il suffit de trouver deux droites sécantes non confondues (d_1) et (d_2) de $\mathcal{P}$ et deux droites sécantes non confondues (δ_1) et (δ_2) de $\mathcal{P}'$ telles que (d_1) est parallèle à (δ_1) et (d_2) est parallèle à (δ_2).

3 Repère de l'espace

Définition 10 : Un repère de l'espace est un quadruplet $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où
- O est un point de l'espace
- $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs non coplanaires.

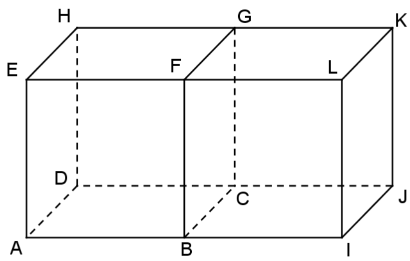
On dit que les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ forment une base de l'espace.

Propriété 8 : Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Il existe un unique triplet de réel $(x; y; z)$ tel que

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

x, y et z sont appelés les coordonnées du vecteur $\vec{u}$. On notera $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

■ **Exemple 6 :** On considère deux cubes $ABCDEFGH$ et $BIJCFLKG$ placés côte à côte.



Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG}$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ sont $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a en effet $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. ■

Définition 11 : Soit M un point de l'espace et $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Les coordonnées du point M sont les réels $(x; y; z)$ tels que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On notera $M(x; y; z)$.

■ **Exemple 7 :** Dans la figure précédente, dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$ le point K a pour coordonnées $(1, 1, 1)$.

On a en effet $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$ ■

Propriété 9 : Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$. Soit λ et μ des réels.

Le vecteur $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\lambda x+\mu x'\\ \lambda y+\mu y'\\ \lambda y+\mu y'\end{pmatrix}$

■ **Exemple 8 :** On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\-15\\9\end{pmatrix}$ sont colinéaires. En effet, $\vec{v}=-3\vec{u}$. ■

■ **Exemple 9 :** Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\6\\3\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\\-7\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

Supposons qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{u}=\lambda v+\mu w$. Alors $\begin{pmatrix}0\\6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\lambda-\mu\\4\lambda+\mu\\-7\lambda+5\mu\end{pmatrix}$

Nous sommes donc amenés à résoudre le système $\begin{cases}2\lambda-\mu &= 0\\4\lambda+\mu &= 6\\-7\lambda+5\mu &= 3\end{cases}$

$$\begin{cases}2\lambda-\mu &= 0\\4\lambda+\mu &= 6\\-7\lambda+5\mu &= 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu &= 2\lambda\\4\lambda+2\lambda &= 6\\-7\lambda+10\lambda &= 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu &= 2\lambda\\6\lambda &= 6\\3\lambda &= 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu &= 2\\\lambda &= 1\\\lambda &= 1\end{cases}$$

Le fait d'avoir deux fois la même ligne n'est pas anormal : nous avons trois équations pour deux inconnues. Si les résultats de ces deux lignes sont différents, cela signifie que les vecteurs ne sont pas coplanaires.

Il faut maintenant vérifier que les valeurs trouvées pour λ et μ conviennent.

Les coordonnées de $\vec{v}+2\vec{w}$ sont en effet $\begin{pmatrix}2+2\times(-1)\\4+2\times1\\-7+2\times5\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}0\\6\\3\end{pmatrix}$. On a donc $\vec{u}=v+2\vec{w}$. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont donc coplanaires.

■

Propriété 10 : Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$.
- Le point I, milieu de $[AB]$, a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.

4 Représentation paramétrique de droite

Propriété 11 : L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de l'espace.

On note (d) la droite passant par le point A et dirigée par $\vec{u}$.
Un point $M(x, y, z)$ appartient à la droite (d) si et seulement s'il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

Démonstration 4.1 : Le point M appartient à la droite (d) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Puisque $\vec{u}$ est non nul, cela revient à dire qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

Ainsi, $\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$ □

Définition 12 : Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de l'espace et (d) la droite passant par le point A et dirigée par $\vec{u}$.

Le système

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

est appelé représentation paramétrique de la droite (d).

■ **Exemple 10 :** La droite passant par le point $A(2; 1; 3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ ■

■ **Exemple 11 :** On considère la droite admettant pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 8 - 4t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Cette droite passe par le point $A(5, 8, 3)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. En prenant $t = 2$, on obtient que cette droite passe par le point de coordonnées $(1, 0, 5)$. ■